Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística
Primavera 2015

Roberto Cortez
Roberto Bobadilla
Dafne Pincheira

Control 2

2 de noviembre de 2015
Tiempo: 3 horas

P1. *a*) (3,0 ptos.) Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos que obtiene la persona, si se sabe que la distancia de la flecha al centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.

b) (3,0 ptos.) Sean X, Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2(x+y) & 0<x<1, 0<y<x \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule las densidades marginales de X e Y. ¿Son independientes? Explique. *Indicación:* dibuje la región en que la densidad conjunta es estrictamente positiva.

P2. *a*) (2,0 ptos.) En una urna hay n bolitas, de las cuales r son rojas y $b = n - r$ son blancas. Se extraen k bolitas al azar sin reposición. Calcule la cantidad esperada de bolitas rojas extraídas. *Indicación:* defina una variable indicatriz adecuada por cada bolita roja y utilice la linealidad de la esperanza.

b) (2,0 ptos.) Sea $X \sim \exp(\lambda)$. Calcule todos los momentos de X.

c) (2,0 ptos.) La cantidad de clientes preferenciales que llegan a un banco en 1 hora es una variable Poisson(λ), mientras que la cantidad de clientes regulares es una variable Poisson(μ). Asumiendo independencia, muestre que la cantidad total de clientes que llegan al banco en 1 hora es una variable Poisson($\lambda + \mu$).

P3. Decimos que una variable aleatoria W tiene distribución *beta* de parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, anotado $W \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$, si su densidad es

$$f_W(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x),$$

donde Γ es la función gamma.

a) (1,5 ptos.) Calcule $\mathbb{E}(W)$ y $\mathrm{var}(W)$. *Indicación:* no calcule las integrales involucradas; en cambio, utilice el hecho que la densidad de una variable beta de parámetros adecuados debe integrar 1. Use también que $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ para todo $t > 0$.

b) (1,5 ptos.) Si $Z \sim \mathrm{Beta}(\alpha, 1)$, calcule la distribución de Z^α.

c) (1,5 ptos.) Sean $X_1, \ldots, X_n$ independientes con distribución unif$(0,1)$, y sea $Z = \min(X_1, \ldots, X_n)$. Muestre que $Z \sim \mathrm{Beta}(1, n)$. *Indicación:* $\min(x_1, \ldots, x_n) > z$ si y sólo si $x_i > z$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

d) (1,5 ptos.) Sean $X \sim \mathrm{gamma}(\alpha, \lambda)$ e $Y \sim \mathrm{gamma}(\beta, \lambda)$ independientes, y sea $U = X/(X+Y)$. Pruebe que $U \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$. *Indicación:* defina $V = X + Y$ y utilice el método del jacobiano.