Guía ejercicios 2

1. Se dispone de un cordel de largo L, el cual se corta en un punto escogido al azar (es decir, uniformemente).

a) Sea X el largo del trozo mayor. Muestre que X es una variable uniforme en el intervalo $[L/2, L]$.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el largo del trozo mayor sea a lo más 4 veces el largo del trozo menor?

2. Sean X, Y variables aleatorias independientes, y sea $Z = \min(X, Y)$. Calcule F_Z en términos de F_X y F_Y. Sabiendo adicionalmente que $X \sim \exp(\lambda)$ e $Y \sim \exp(\mu)$, calcule la densidad de Z.

3. Para ir de la Facultad a su casa, usted tiene dos opciones: puede esperar el bus de la línea A en el paradero correspondiente, o bien el bus de la línea B en otro paradero. Los tiempos T_A y T_B (en minutos) que tarda en pasar el siguiente bus de la línea respectiva son variables aleatorias exponenciales independientes de parámetros λ_A y λ_B, respectivamente. Suponga que usted escoge el paradero al azar, independiente de T_A y T_B. Sea T su tiempo de espera para abordar al bus.

a) Muestre que $\mathbb{P}(T_A < T_B) = \lambda_A/(\lambda_A + \lambda_B)$.

b) Si a los t minutos usted sigue en el paradero, ¿cuál es la probabilidad de que esté esperando el bus de la línea A? Suponiendo $\lambda_B > \lambda_A$, ¿qué ocurre cuando t es grande?

c) Usted cambia su estrategia: se ubica a medio camino entre los paraderos, y apenas visualiza el primer bus que viene llegando, usted corre al paradero correspondiente y aborda el bus. ¿Cuál es la distribución de T con esta estrategia?

4. *a*) Sea Z una variable geom(p). Muestre que $\mathbb{P}(Z > k) = (1-p)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Se sabe que el evento en que un teléfono celular de la marca A se rompe cuando cae al suelo tiene probabilidad p, independiente de las otras caídas. Para un celular de la marca B se cumple lo mismo, pero con probabilidad q de romperse, donde $q > p$. Usted se compra un celular y escoge al azar la marca, y después de k caídas aún funciona.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya escogido la marca A? ¿Qué pasa cuando k es grande? Comente. *Indicaci'on:* trabaje con la variable aleatoria X del número de la caída en que el celular se rompe. ¿Qué distribución tiene X cuando la marca es A?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que su celular vuelva a sobrevivir otras k caídas?

d) Suponga que su celular efectivamente es de la marca A. Suponga también que la cantidad de caídas que ocurren mensualmente es una variable Y con distribuci'on de Poisson con parámetro $\lambda > 0$. Calcule la probabilidad de que su celular sobreviva un mes más. *Indicación:* utilizando una propiedad conocida, condicione en los posibles resultados de Y. Puede suponer que las variables X e Y son independientes.

5. Sea F la función de distribución acumulada de alguna variable aleatoria. Suponga que F es invertible.

a) Sea X variable aleatoria tal que $F_X = F$. ¿Qué variable aleatoria es $F(X)$?

b) Sea Y variable aleatoria uniforme en $[0, 1]$. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria $F^{-1}(Y)$?

6. Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos que obtiene la persona, si se sabe que la distancia de la flecha al centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.

7. El arancel mensual de una determinada carrera universitaria asciende a \$60. Si el ingreso per cápita mensual de la familia de un estudiante es inferior a \$50, se le asigna 100 % de beca; si el ingreso per cápita está entre \$50 y \$80, se le asigna 50 % de beca; y si está entre \$80 y \$100, se asigna un 25 %. En otro caso, no se asigna beca. Calcule el valor esperado de la beca mensual asignada a un estudiante escogido al azar, suponiendo que el ingreso per cápita mensual de la familia se distribuye uniformemente en el intervalo $[\$25, \$175]$.

8. Calcule $\mathbb{E}(X)$ si X tiene densidad dada por

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} c(1 - x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 5/x^2 & x > 5 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

9. Sea $X \sim \text{bin}(n, p)$. Muestre que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1 - (1-p)^{n+1}}{(n+1)p}.$$

10. *a*) Sea X variable aleatoria con densidad f_X simétrica, es decir, $f_X(x) = f_X(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que la densidad de la variable aleatoria $|X|$ es $f_{|X|}(x) = 2 f_X(x) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$.

b) Sea X variable $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Calcule $\mathbb{E}(|X|)$.

11. Se tienen dos mazos idénticos con n cartas cada uno. La persona A extrae k_A cartas al azar del primer mazo, y la persona B extrae, independiente de A, k_B cartas al azar del segundo mazo.

a) Muestre que el número esperado de cartas que aparecen simultáneamente entre las escogidas por A y por B, es $(k_A k_B)/n$.

b) Muestre que el número esperado de cartas que aparecen entre las escogidas por uno de ellos, pero no ambos, es $(n k_A + n k_B - 2 k_A k_B)/n$.

Indicación: defina variables indicatrices adecuadas para cada caso, y use linealidad de la esperanza.

12. Se dispone de una urna con N bolitas numeradas de 1 a N. Se extraen bolitas con resposición de manera independiente hasta que haya salido cada bolita al menos una vez. Sea X la variable que denota la cantidad total de extracciones realizadas, y sea X_k la cantidad de extracciones desde la vez $k-1$ que aparece una bolita que no había salido antes (excluyendo esa extracción) hasta la siguiente vez que aparece una bolita que no ha salido antes (incluyendo esa extracción), para $k=1,\dots,N$. Deduzca la distribución de cada X_k, y obtenga una expresión para $\mathbb{E}(X)$.

13. Un grupo de n hombres y m mujeres se forman al azar en una fila. Determine el número esperado de hombres que tienen al menos una mujer al lado suyo. *Indicación:* defina una variable indicatriz adecuada por cada hombre.

14. Sea X variable aleatoria. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $s(\alpha)=\mathbb{E}[(X-\alpha)^2]$. Pruebe que para todo α se tiene que $s(\alpha) \geq \operatorname{var}(X)$ y que se alcanza la igualdad solo cuando $\alpha=\mathbb{E}(X)$.

15. La densidad de la variable aleatoria X es $f_X(x) = (ax+bx^2)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Se sabe además que el valor esperado de X es 0,6.

a) Calcule a y b.

b) Calcule F_X y $\mathbb{P}(X>1/2)$.

c) Calcule $\operatorname{var}(X)$.

16. Sea $X \sim \operatorname{unif}(-1,1)$ y sea $Y=X^2$. Muestre que $\operatorname{cov}(X,Y)=0$, pero X e Y no son independientes. *Observación:* recuerde que si dos variables son independientes, entonces su covarianza es 0; este es un ejemplo de que la implicancia recíproca es falsa en general.

17. Decimos que la variable aleatoria X tiene distribución de *Pareto* con parámetros $m,\alpha>0$, si su densidad está dada por

$$f(x)=c(m/x)^{\alpha+1}\mathbb{1}_{[m,\infty)}(x).$$

a) ¿Cuál es el valor de c?

b) ¿Para cuáles α está bien definida la esperanza de X? Calcule $\mathbb{E}(X)$ para aquellos α que tenga sentido.

c) ¿Para cuáles α está bien definida la varianza de X? Calcule $\operatorname{var}(X)$ para aquellos α que tenga sentido.

d) ¿Cuál es la distribución de $\log(X/m)$?

18. Decimos que una variable aleatoria X tiene distribución de *Laplace* de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $b>0$, si su densidad está dada por

$$f_X(x)=\frac{1}{2b}e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

a) Muestre que la función generadora de momentos de X es $M_X(t)=e^{\mu t}/(1-b^2t^2)$ para $|t|<1/b$.

b) Calcule la esperanza y varianza de X.

c) Suponiendo $\mu=0$, calcule la densidad de $|X|$. ¿Qué variable conocida es $|X|$?

d) Sean $Y_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $Y_2 \sim \exp(\lambda_2)$ variables independientes. Pruebe que $\lambda_1 Y_1 - \lambda_2 Y_2$ tiene distribución de Laplace con parámetros $\mu=0$ y $b=1$.

19. Se dice que la variable aleatoria X tiene distribución *log-normal* con parámetros μ y σ^2 si $Y=\ln(X)$ tiene distribución $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

a) Pruebe que la densidad de X es

$$f_X(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

b) Pruebe que para todo $s \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(X^s) = e^{\mu s+\sigma^2 s^2/2}$. Obtenga la esperanza y varianza de X. *Indicación:* utilice la función generadora de momentos de una variable $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

c) Pruebe que la f.g.m. $M_X(t)$ no está definida para $t>0$.

d) Sea $U \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, y sean $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$. Pruebe que $V=\alpha+\beta U$ tiene distribución $\mathcal{N}(\alpha+\beta\mu,\beta^2\sigma^2)$. Utilice esto para obtener la distribución de aX^b, donde $a>0$ y $b \neq 0$.

e) Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes con distribución log-normal de parámetros μ_1, σ_1^2 y μ_2, σ_2^2, respectivamente. ¿Cuál es la distribución de $Z=X_1X_2$?

20. Sea X variable aleatoria con distribución *chi-cuadrado con n grados de libertad*, anotado $X \sim \chi_n^2$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(x)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{n/2-1}e^{-x/2}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

donde $\Gamma(\theta)=\int_0^\infty e^{-z}z^{\theta-1}dz$ es la función Gamma.

a) Muestre que la f.g.m. de X es $M_X(t)=(1-2t)^{-n/2}$ para $t<1/2$.

b) Calcule $\mathbb{E}(X)$ y $\operatorname{var}(X)$.

c) Si Y es una variable normal estándar, muestre que $Y^2 \sim \chi_1^2$. Utilice el hecho que $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$.

d) Concluya que si $X_1,\dots,X_n$ son normales estándar independientes, entonces $X_1^2+\cdots+X_n^2$ tiene distribución χ_n^2. *Indicación:* utilice las propiedades de la f.g.m.

21. Sean X e Y variables aleatorias independientes con funciones generadoras de momentos dadas por

$$M_X(t)=e^{2e^t-2} \ \text{ y } \ M_Y(t)=\frac{e^t/2}{1-e^t/2}.$$

Pruebe que $\mathbb{P}(XY=1)=1/e^2$. *Indicación:* recuerde que la función generadora de momentos caracteriza la distribución de una variable aleatoria.

22. Sean X, Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} 2(x+y) & 0<x<1, 0<y<x \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calcule las densidades marginales de X e Y. ¿Son independientes? Explique. *Indicación:* dibuje la región en que la densidad conjunta es estrictamente positiva.

23. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{x^2y^2}, \quad x \geq 1, y \geq 1.$$

Se definen las variables aleatorias $U=XY$, $V=X/Y$.

a) Calcule la densidad conjunta de (U,V).

b) Encuentre las densidades marginales de U y V.

24. Sean X e Y variables independientes con distribución normal estándar. Determine la función de densidad conjunta de $U=X$ y $V=X/Y$. Muestre que X/Y tiene distribuci'on de Cauchy, es decir, su densidad es

$$\frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$