Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística
Primavera 2015

Roberto Cortez
Roberto Bobadilla
Dafne Pincheira

Pauta Control 1

P1. *a)* (1,0 pto.) Sean E y F eventos. Pruebe que $\mathbb{P}(E^cF^c) = 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(EF)$.

Solución. Escribiendo Ω como una unión disjunta y usando el Axioma 3, tenemos:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}([E \cup F] \cup [E \cup F]^c) = \mathbb{P}(E \cup F) + \mathbb{P}([E \cup F]^c).$$

Notando que $[E \cup F]^c = E^cF^c$ y que $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(EF)$ por propiedad vista en cátedra, despejando $\mathbb{P}(E^cF^c)$ se obtiene lo deseado.

b) (2,0 ptos.) Sean A y B dos eventos. Pruebe que si $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B)$ entonces $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

Solución. Es claro que $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$. Como $\mathbb{P}(\cdot)$ es una función creciente de eventos, se obtiene que

$$\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(A \cup B).$$

Por hipótesis, sabemos que el lado izquierdo y derecho de lo anterior son iguales, lo cual implica que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cup B)$. El mismo argumento aplica para B, concluyendo que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A)$.

c) (3,0 ptos.) Se dispone de dos monedas, una equilibrada y la otra con probabilidad 3/4 de cara. Se escoge al azar una de las dos monedas, y se lanza dos veces. Sea C_i el evento en que el lanzamiento i resulta cara, para $i = 1, 2$. Calcule $\mathbb{P}(C_1)$, $\mathbb{P}(C_2)$ y $\mathbb{P}(C_1C_2)$. ¿Son independientes los eventos C_1 y C_2? Explique.

Solución. Sea G el evento en que se escoge la moneda equilibrada. Calculemos $\mathbb{P}(C_1)$ utilizando la regla de probabilidades totales:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_1) &= \mathbb{P}(C_1 \mid G)\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(C_1 \mid G^c)\mathbb{P}(G^c) \\ &= (1/2) \times (1/2) + (3/4) \times (1/2) \\ &= 5/8.\end{aligned}$$

Para $\mathbb{P}(C_2)$ el cálculo es idéntico, obteniendo también 5/8. Notemos que los lanzamientos son independientes, pero s'olo una vez que se ha escogido la moneda. Es decir, C_1 y C_2 son condicionalmente independientes con respecto a G y con respecto a G^c. Luego:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_1C_2) &= \mathbb{P}(C_1C_2 \mid G)\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(C_1C_2 \mid G^c)\mathbb{P}(G^c) \\ &= \mathbb{P}(C_1 \mid G)\mathbb{P}(C_2 \mid G)\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(C_1 \mid G^c)\mathbb{P}(C_2 \mid G^c)\mathbb{P}(G^c) \\ &= (1/2) \times (1/2) \times (1/2) + (3/4) \times (3/4) \times (1/2) \\ &= 13/32.\end{aligned}$$

Esto nos permite calcular $\mathbb{P}(C_2 \mid C_1)$:

$$\mathbb{P}(C_2 \mid C_1) = \frac{\mathbb{P}(C_2C_1)}{\mathbb{P}(C_1)} = \frac{13/32}{5/8} = 13/20.$$

Notemos que $\mathbb{P}(C_2) = 5/8 = 25/40 < 26/40 = 13/20 = \mathbb{P}(C_2 \mid C_1)$. Es decir, al condicionar en el evento en que el primer lanzamiento sale cara aumenta levemente la probabilidad de que la segunda moneda también salga cara. Esto se debe a que si uno conoce el resultado del primer lanzamiento, eso entrega indicios acerca de cuál fue la moneda escogida, lo cual afecta las probabilidades del segundo lanzamiento.

P2. *a*) ¿De cuántas maneras se pueden sentar 8 personas en una fila si:

1) (1,0 pto.) Fulano y Mengano no quieren quedar juntos?

Solución. La cantidad de formas en que Fulano y Mengano sí quedan juntos es $2 \times 7 \times 6!$: hay 7 formas de seleccionar las 2 posiciones contiguas dentro de la fila de tamaño 8, por cada una de ellas hay 2 formas de ubicar a Fulano y Mengano y 6! formas de ubicar a los otros en las 6 posiciones restantes. Luego, la cantidad buscada es $8! - 2 \times 7 \times 6! = 6 \times 7!$.

2) (1,0 pto.) hay 4 parejas y todos quieren quedar sentados junto a su compañero/a?

Solución. La cantidad buscada es $4! \times 2^4$: hay 4! formas de ordenar a las 4 parejas, y por cada pareja hay 2 formas de ubicarse.

3) (1,0 pto.) hay 5 mujeres y tienen que quedar todas juntas?

Solución. La cantidad buscada es $4 \times 5! \times 3!$: hay 4 formas de seleccionar las 5 posiciones contiguas en que irán las mujeres en la fila de 8, y una vez fijas estas posciones, hay 5! formas de ubicar a las 5 mujeres y 3! formas de ubicar al resto.

b) Usted acordó juntarse con una amiga a las 21:00, y usted llega puntual al lugar de encuentro. Sin embargo, usted sabe que la probabilidad que ella decida no asistir es de un 20 %; y en caso que efectivamente asista, con probabilidad de un 25 % llegará más de 20 minutos atrasada. Usted decide esperar hasta las 21:20, y marcharse si su amiga no ha llegado.

1) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de que logren juntarse?

Solución. Sea J el evento en que logran juntarse, y A el evento en que su amiga asiste. Por probabilidades totales, tenemos:

$$\mathbb{P}(J) = \mathbb{P}(J \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(J \mid A^c)\mathbb{P}(A^c) = (3/4) \times (4/5) + 0 \times (1/5) = 3/5 = 60\,\%.$$

2) (1,5 ptos.) Suponga que no logran juntarse. ¿Cuál es la probabilidad de que su amiga llegue una vez que usted se marchó?

Solución. El evento en que su amiga llega después de que usted se marcha corresponde a J^cA. Queremos entonces calcular $\mathbb{P}(J^cA \mid J^c) = \mathbb{P}(A \mid J^c)$. Usando la regla de Bayes y el hecho que $\mathbb{P}(J^c) = 2/5$ por la parte anterior, tenemos:

$$\mathbb{P}(A \mid J^c) = \frac{\mathbb{P}(J^c \mid A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(J^c)} = \frac{(1/4) \times (4/5)}{2/5} = 1/2 = 50\,\%.$$

P3. *a*) (3,0 ptos.) Se lanza n veces de manera independiente un dado equilibrado con m caras. Se define una *racha* como una secuencia maximal de resultados del mismo tipo (por ejemplo, 1133322 tiene 3 rachas, mientras que 3221212 tiene 6 rachas). Sea X la variable aleatoria correspondiente al número de rachas obtenidas. Indicar el rango de X y calcular la función p_X.

Solución. Es claro que el rango es $R_X = \{1, \ldots, n\}$. Para k en este conjunto, calculemos $p_X(k) = \mathbb{P}(X = k)$. Para que haya k rachas debe haber $k-1$ comienzos de rachas aparte de la primera, y estos comienzos deben escogerse entre las posiciones $2, \ldots, n$, lo cual puede hacerse de $\binom{n-1}{k-1}$ formas. La cara de la primera racha puede ser cualqueira de las m, mientras que la segunda racha tiene $m-1$ posibilidades (todas menos la anterior), la tercera también tiene $m-1$, etc.; es decir, hay $m(m-1)^{k-1}$ formas de escoger las caras de las k rachas. Una vez hechas las elecciones previas, el resultado de cada uno de los n lanzamientos está fijo, y como cada cara tiene probabilidad $1/m$, obtenemos finalmente:

$$p_X(k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n-1}{k-1} m(m-1)^{k-1} \left(\frac{1}{m}\right)^n = \binom{n-1}{k-1} \frac{(m-1)^{k-1}}{m^{n-1}}.$$

b) (3,0 ptos.) Sean $X \sim \mathrm{BN}(r, p)$ e $Y \sim \mathrm{binom}(n, p)$. Demuestre que $\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(Y < r)$. *Indicación:* siga una de las siguientes dos alternativas: demuestre la igualdad de manera analítica (no recomendado), o bien razone en términos de lanzamientos de una moneda con probabilidad p de cara, identificando variables X e Y con la distribución deseada y estudiando la relación entre los eventos $\{X > n\}$ e $\{Y < r\}$ (recomendado).

Solución. Sigamos la segunda alternativa: se lanza una moneda con probabilidad p de cara muchas veces de manera independiente, y anotamos X a la cantidad de lanzamientos hasta que se obtiene la cara r–ésima, e Y corresponde a la cantidad de caras obtenidas en los primeros n lanzamientos. Sabemos que $X \sim \mathrm{BN}(r, p)$ e $Y \sim \mathrm{binom}(n, p)$. El evento $\{X > n\}$ corresponde a que la cara r–ésima salió después del lanzamiento n–ésimo; es decir, en los primeros n lanzamientos ocurrieron estrictamente menos que r caras. Pero la cantidad de caras en dichos lanzamientos es justamente Y, lo cual muestra que el evento $\{X > n\}$ es igual al evento $\{Y < r\}$, probando lo deseado.

Veamos la primera alternativa: llamando $q = 1 - p$, tenemos

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r} = p^r \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(r-1)!(k+1-r)!} q^{k+1-r}.$$

Notemos que $\frac{d^{r-1}}{dq^{r-1}} q^k = \frac{k!}{(k-r+1)!} q^{k-r+1}$. Continuando:

$$= \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dq^{r-1}} \sum_{k=n}^{\infty} q^k. = \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dq^{r-1}} \left(q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k \right) = \frac{p^r}{(r-1)!} \frac{d^{r-1}}{dq^{r-1}} \left(\frac{q^n}{1-q} \right),$$

donde en el último paso hemos usado la serie geométrica. Utilizando la regla de Leibniz:

$$= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r-1}{k} \left(\frac{d^k}{dq^k} q^n \right) \left(\frac{d^{r-1-k}}{dq^{r-1-k}} \frac{1}{1-q} \right).$$

Es fácil ver que $\frac{d^k}{dq^k} q^n = \frac{n!}{(n-k)!} q^{n-k}$ y que $\frac{d^i}{dq^i} \frac{1}{1-q} = \frac{i!}{(1-q)^{i+1}}$. Luego:

$$= \frac{p^r}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(r-1)!}{k!(r-1-k)!} \left(\frac{n! q^{n-k}}{(n-k)!} \right) \left(\frac{(r-1-k)!}{(1-q)^{r-k}} \right) = p^r \sum_{k=0}^{r-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} q^{n-k} \left(\frac{1}{p} \right)^{r-k}.$$

Esto es igual a $\sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, que corresponde a sumar $\mathbb{P}(Y = k)$ desde $k = 0$ hasta $r-1$. Es decir, es igual a $\mathbb{P}(Y < r)$, como deseábamos probar.