Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-5 Probabilidades y Estadística
Otoño 2013

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

CONTROL 1

15 de abril de 2013

Tiempo: 3 horas

P1. (a) Un avión se ha perdido, y se presume que está en una de 3 posibles zonas, de manera equiprobable. Denotemos α_i, para $i = 1, 2, 3$, la probabilidad de que una búsqueda encuentre el avión en la zona i cuando efectivamente está en esa zona. Se realizará una búsqueda en las tres regiones.

1) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar el avión?
2) (1,5 ptos.) Dado que la búsqueda en la zona 1 no encontró al avión, calcule la probabilidad de que esté en la zona i, para $i = 1, 2, 3$.

(b) Sea $S = \{1, \dots, n\}$ y suponga que A y B son subconjuntos extraídos de manera independiente y al azar entre todos los posibles subconjuntos de S.

1) (1,5 ptos.) Pruebe que $\mathbb{P}(A \subseteq B) = (3/4)^n$. *Indicación:* condicione en la cantidad de elementos de B.
2) (1,5 ptos.) Pruebe que $\mathbb{P}(AB = \emptyset) = (3/4)^n$. *Indicación:* argumente por qué B^c también puede verse como un subconjunto escogido independiente de A y al azar entre todos los posibles subconjuntos de S; luego escriba el evento $AB = \emptyset$ de manera conveniente usando a B^c y concluya usando la parte anterior.

P2. (a) Considere una variable aleatoria X con densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} C & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 2C & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde C es una constante.

1) (1,0 pto.) Muestre que $C = 1/3$.
2) (1,5 pto.) Calcule la distribución acumulada de X.
3) (1,5 pto.) Sea $Y = |X|$. Calcule F_Y, ¿qué variable conocida es Y?

(b) (2,0 ptos.) Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria sobre el espacio $(\Omega, \mathbb{P})$. Recuerde que la *ley* de X se define como la función μ_X que a cada $A \subseteq \mathbb{R}$ le asocia $\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$. Pruebe que μ_X es una probabilidad sobre $\mathbb{R}$.

P3. (a) Se lanzan 5 dados indistinguibles y equilibrados.

1) (1,5 ptos.) ¿Cuántos posibles resultados hay? Argumente por qué estos resultados no son equiprobables.
2) (1,5 ptos.) Suponga ahora que ⚀ es un comodín, es decir, puede ser considerado como cualquiera de las 6 caras. Calcule la probabilidad de obtener la misma cara en los 5 dados (observe que resultados como ⚀⚀⚁⚁⚁ sí son de este tipo).

(b) Se dispone de una secuencia finita de números, digamos $-\infty = a_0 < a_1 < \dots < a_n < a_{n+1} = \infty$, y considere los intervalos $I_i = (a_{i-1}, a_i]$, para $i \in \{1, \dots, n\}$, e $I_{n+1} = (a_n, a_{n+1})$. Sea X una variable aleatoria con función de distribución acumulada F.

1) (1,5 ptos.) Para todo $i = 1, \dots, n+1$, calcule $p_i = \mathbb{P}(X \in I_i)$ en términos de F.
2) (1,5 ptos.) Se escogen m puntos al azar en $\mathbb{R}$ de manera independiente y cada uno con distribución acumulada F. Dados $k_1, \dots, k_{n+1} \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{i=1}^{n+1} k_i = m$, obtenga una expresión en términos de los p_i para la probabilidad del evento en que caen k_1 puntos en I_1, k_2 puntos en I_2, y así sucesivamente, hasta k_{n+1} puntos en I_{n+1}.