Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-2 Probabilidades y Estadística
Primavera 2014

Roberto Cortez
Ignacio López
Dafne Pincheira

Pauta Control 1

P1. *a)* Por propiedad vista en cátedra, sabemos que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)$. Usando esto tres veces, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E \cup F \cup G) &= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \cup G) - \mathbb{P}(E \cap (F \cup G)) \\
&= \mathbb{P}(E) + [\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(FG)] - \mathbb{P}(EF \cup EG) \\
&= \mathbb{P}(E) + [\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(FG)] - [\mathbb{P}(EF) + \mathbb{P}(EG) - \mathbb{P}(EF \cap EG)] \\
&= \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(EF) - \mathbb{P}(EG) - \mathbb{P}(FG) + \mathbb{P}(EFG).
\end{aligned}$$

b) 1) La cantidad buscada es

$$\binom{4+4-1}{4} - 2 = \binom{7}{4} - 2$$

Esto se debe a que el experimento descrito equivale a repartir 4 bolitas en 4 urnas, donde las urnas son los 4 colores, y las bolitas son los 4 plumones que se escogen. Con una salvedad: hay que descontar los 2 casos en que los 4 plumones son rojos o los 4 son verdes, pues de esos colores hay solo 3, lo cual explica el -2 en la expresión anterior.

2) Hay $\binom{16}{4}$ formas distintas de escoger los 4 plumones, y cualquier configuración es equiprobable. Para que sean los 4 de distinto color, debo escoger exactamente uno de cada uno. Hay 6 formas de escoger un plumón azul de entre los 6 que hay, 4 en el caso de los negros y 3 para los rojos y verdes. Por lo tanto la probabilidad buscada es

$$\frac{6 \times 4 \times 3 \times 3}{\binom{16}{4}}.$$

P2. *a)* Consideremos los eventos

$$\begin{aligned}
\text{NN} &: \text{se saca la carta negra por ambos lados} \\
\text{RR} &: \text{se saca la carta roja por ambos lados} \\
\text{NR} &: \text{se saca la carta negra por un lado y roja por el otro} \\
\text{VR} &: \text{la cara visible es roja} \\
\text{OR} &: \text{la cara oculta es roja.}
\end{aligned}$$

Queremos calcular la probabilidad de que la cara oculta sea roja, dado que la cara visible lo es. Tenemos:

$$\mathbb{P}(\text{OR} \mid \text{VR}) = \frac{\mathbb{P}(\text{OR} \cap \text{VR})}{\mathbb{P}(\text{VR})} = \frac{1/3}{\mathbb{P}(\text{VR})},$$

donde el último paso se debe a que obtener rojo en la cara visible y también en la oculta equivale al evento RR, el cual tiene probabilidad $1/3$ pues la extracción es al azar. Para calcular $\mathbb{P}(\text{VR})$ utilizamos la regla de probabilidades totales:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{VR}) &= \mathbb{P}(\text{VR} \mid \text{NN})\mathbb{P}(\text{NN}) + \mathbb{P}(\text{VR} \mid \text{RR})\mathbb{P}(\text{RR}) + \mathbb{P}(\text{VR} \mid \text{NR})\mathbb{P}(\text{NR}) \\
&= 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho que cuando se extrae la carta con cara negra por un lado y roja por otro, la cara visible es roja con probabilidad 1/2. Obtenemos entonces

$$\mathbb{P}(\mathrm{OR} \mid \mathrm{VR}) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}.$$

Es decir, conviene apostar a que la otra cara también es roja, pues tiene probabilidad 2/3, mientras que la probabilidad de que sea negra es de 1/3.

b) Si $\mathbb{P}(E) = 1$, entonces

$$\mathbb{P}(E) = 1 = 1 \times 1 = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(E),$$

lo cual muestra que E es independiente de E. Análogamente, si $\mathbb{P}(E) = 0$, entonces

$$\mathbb{P}(E) = 0 = 0 \times 0 = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(E).$$

Esto prueba que si E es trivial, entonces es independiente de sí mismo. Para la implicancia recíproca: si E es independiente de sí mismo, entonces

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(E),$$

es decir, $\mathbb{P}(E)$ resuelve la ecuación $x = x^2$. Esta ecuación tiene como soluciones a 1 y 0, es decir, necesariamente $\mathbb{P}(E) = 1$ ó bien $\mathbb{P}(E) = 0$. Luego, E es trivial.

c) Sea $y \in [0, 1]$. Por definición de distribución acumulada, tenemos:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) \\ &= \mathbb{P}(F(X) \leq y) \\ &= \mathbb{P}(X \leq F^{-1}(y)), \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos usado el hecho que F^{-1} es una función creciente, ya que F lo es. Notemos que $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ para todo x, pues F es la distribución acumulada de X. Usando esto en $x = F^{-1}(y)$, obtenemos:

$$F_Y(y) = F(F^{-1}(y)) = y.$$

Esto vale para todo $y \in [0, 1]$. Es directo ver que $F_Y(y) = 0$ cuando $y < 0$ y que $F_Y(y) = 1$ cuando $y > 1$. En resumen:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0, \\ y & \text{si } y \in [0, 1], \\ 1 & \text{si } y > 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, Y es una variable uniforme en el intervalo $[0, 1]$.

P3. *a*) Consideremos los eventos

$$\begin{aligned} M &: \text{el fósforo escogido está malo} \\ K &: \text{luego de } k \text{ intentos el fósforo escogido aún no enciende.} \end{aligned}$$

1) Queremos calcular $\mathbb{P}(M \mid K)$. Por regla de Bayes:

$$\mathbb{P}(M \mid K) = \frac{\mathbb{P}(K \mid M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(K)} = \frac{1 \times m/(n+m)}{\mathbb{P}(K)},$$

donde hemos usado el hecho que cuando el fósforo está malo nunca encenderá, y además $\mathbb{P}(M) = m/(n+m)$ ya que la elección del fósforo es al azar. Para calcular $\mathbb{P}(K)$ usamos la regla de probabilidades totales:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(K) &= \mathbb{P}(K \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(K \mid M^c)\mathbb{P}(M^c) \\ &= 1 \times \frac{m}{n+m} + (1-p)^k \times \frac{n}{n+m} \\ &= \frac{m + n(1-p)^k}{n+m},\end{aligned}$$

donde en el penúltimo paso hemos usado el hecho que cuando el fósforo está bueno se requiere que no encienda (probabilidad $1-p$) en los k intentos, lo cual tiene probabilidad $(1-p)^k$ por independencia. La probabilidad buscada es entonces

$$\mathbb{P}(M \mid K) = \frac{m/(n+m)}{(m+n(1-p)^k)/(n+m)} = \frac{m}{(m+n(1-p)^k)}.$$

2) Sea el evento

$$E: \text{el fósforo escogido enciende en el intento } k+1.$$

Queremos calcular $\mathbb{P}(E \mid K)$. Por definición de probabilidad condicional y por regla de probabilidades totales, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \mid K) &= \frac{\mathbb{P}(EK)}{\mathbb{P}(K)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(EK \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(EK \mid M^c)\mathbb{P}(M^c)}{\mathbb{P}(K)} \\ &= \frac{0 \times m/(n+m) + (1-p)^k p \times n/(n+m)}{(m+n(1-p)^k)/(n+m)} \\ &= \frac{(1-p)^k pn}{m+n(1-p)^k}.\end{aligned}$$

Hemos usado que cuando el fósforo está bueno, encenderá en el intento $k+1$ con probabilidad $(1-p)^k p$, en analogía con una variable geométrica de parámetro p.

b) A lo más puede haber $24/2 = 12$ pares limpios, y por lo menos 4, pues si se sacan 20 calcetines sin su pareja, los siguientes 4 calcetines necesariamente deben repetirse. Luego, el rango de X es $\{4, \ldots, 12\}$.

Si hay exactamente k pares limpios, claramente debe cumplirse $2k + l = 24$, donde l es la cantidad de pares con un calcetín limpio y otro sucio. Luego, necesariamente $l = 24 - 2k$. Además, la cantidad de pares que quedan sucios son los restantes, es decir, $20 - k - l = k - 4$. Con esto, para todo $k \in \{4, \ldots, 12\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{20}{k,24-2k,k-4} \times 2^{24-2k}}{\binom{40}{24}}.$$

El término $\binom{20}{k,24-2k,k-4}$ corresponde a la cantidad de formas de separar los 20 pares en 3 grupos: los k pares limpios, los $l = 24 - 2k$ pares con un calcetín limpio y otro sucio, y los $k-4$ pares sucios. Una vez escogidos los pares, para echar a lavar se deben escoger todos los calcetines del primer grupo (1 sola forma), un calcetín de cada par del segundo grupo (2^{24-2k} formas), y ningún calcetín del último grupo (1 sola forma), lo cual arroja el término 2^{24-2k}. El término $\binom{40}{24}$ del denominador es la cantidad de formas de escoger 24 calcetines entre los 40 disponibles, las cuales son equiprobables.