Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Otoño 2012

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Pauta Examen

P1. (a) 1) Distinguiendo a las personas, hay n^m posibles formas de bajarse. Para cumplir con la restricción, necesitamos repartir a las m personas en m grupos de tamaños $m_1, \ldots, m_n$, lo cual sabemos que puede hacerse de $\binom{m}{m_1,\ldots,m_n}$ formas. Por lo tanto, la probabilidad buscada es

$$\frac{\binom{m}{m_1,\ldots,m_n}}{n^m}.$$

2) Para que todos bajen en pisos diferentes, primero debemos escoger m de los n pisos en los cuales se bajan, lo cual puede hacerse de $\binom{n}{m}$ formas. Después, asignamos una persona por cada piso escogido, lo cual puede hacerse de $m!$ formas. La probabilidad buscada es entonces

$$\frac{\binom{n}{m}m!}{n^m}.$$

(b) 1) Como son independientes, la densidad conjunta de T_A y T_B es el producto de sus densidades, es decir

$$f_{T_A,T_B}(t,s) = \lambda_A \lambda_B e^{-\lambda_A t - \lambda_B s} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(t) \mathbf{1}_{[0,\infty)}(s).$$

Sea $C = \{(x,y) : x < y\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_A < T_B) = \mathbb{P}((T_A, T_B) \in C) &= \iint_C f_{T_A,T_B}(t,s)dtds \\
&= \int_0^\infty \int_t^\infty \lambda_A \lambda_B e^{-\lambda_A t - \lambda_B s} dsdt \\
&= \int_0^\infty \lambda_A e^{-\lambda_A t} \left[\int_t^\infty \lambda_B e^{-\lambda_B s} ds \right] dt \\
&= \int_0^\infty \lambda_A e^{-\lambda_A t} e^{-\lambda_B t} dt \\
&= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \int_0^\infty (\lambda_A + \lambda_B) e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t} dt,
\end{aligned}$$

donde la última integral vale 1, obteniendo lo deseado.

2) Sea Y el paradero que usted escoge (A ó B). Por regla de Bayes, tenemos:

$$\mathbb{P}(Y = A \mid T > t) = \frac{\mathbb{P}(T > t \mid Y = A)\mathbb{P}(Y = A)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{\mathbb{P}(T_A > t)\mathbb{P}(Y = A)}{\mathbb{P}(T > t)},$$

donde $\mathbb{P}(Y = A) = 1/2$ y $\mathbb{P}(T_A > t) = e^{-\lambda_A t}$. Para $\mathbb{P}(T > t)$, usamos la regla de probabilidades totales:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > t) &= \mathbb{P}(T > t \mid Y = A)\mathbb{P}(Y = A) + \mathbb{P}(T > t \mid Y = B)\mathbb{P}(Y = B) \\
&= \mathbb{P}(T_A > t) \times (1/2) + \mathbb{P}(T_B > t) \times (1/2) \\
&= (1/2) \times [e^{-\lambda_A t} + e^{-\lambda_B t}].
\end{aligned}$$

Luego, la probabilidad buscada es

$$\mathbb{P}(Y = A \mid T > t) = \frac{e^{-\lambda_A t} \times (1/2)}{(1/2) \times [e^{-\lambda_A t} + e^{-\lambda_B t}]} = \frac{1}{1 + e^{-(\lambda_B - \lambda_A)t}}.$$

Como $\lambda_B - \lambda_A > 0$, lo anterior converge a 1 cuando $t \to \infty$. Por lo tanto, si usted lleva mucho tiempo esperano, lo más probable es que haya escogido el paradero de la línea A.

3) Con la nueva estrategia, el tiempo de espera corresponde al tiempo del primer bus que pasa, es decir $T = \text{mín}(T_A, T_B)$. Con esto, para $t \geq 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(\text{mín}(T_A, T_B) > t) &= \mathbb{P}(T_A > t, T_B > t) \\ &= \mathbb{P}(T_A > t)\mathbb{P}(T_B > t) \\ &= e^{-\lambda_A t} e^{-\lambda_B t},\end{aligned}$$

donde hemos usado la independencia de las variables. Por lo tanto:

$$F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - \mathbb{P}(T > t) = 1 - e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t},$$

y derivando con respecto a t obtenemos $f_T(t) = (\lambda_A + \lambda_B)e^{-(\lambda_A + \lambda_B)t}$. Por lo tanto, $T \sim \exp(\lambda_A + \lambda_B)$.

P2. (a) Calculemos el estimador de los momentos. Imponemos que el primer momento muestral sea igual al primer momento real de la variable, es decir:

$$\bar{X} = \mathbb{E}(X_1) = mp.$$

Despejando p obtenemos que el estimador es $\bar{X}/m$, como deseábamos. Para el otro estimador, notemos que la verosimilitud corresponde a

$$L = L(x_1, \ldots, x_n; p) = \prod_{i=1}^{n} \binom{m}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{m - x_i}.$$

Tomando logaritmo, derivando con respecto a p e igualando a 0, tenemos:

$$0 = \frac{d \log L}{dp} = \frac{d}{dp} \sum_{i=1}^{n} \left[\log \binom{m}{x_i} + x_i \log p + (m - x_i) \log(1-p) \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{x_i}{p} - \frac{m - x_i}{1-p} \right].$$

Multiplicando por $p(1-p)$, se obtiene:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} [(1-p)x_i - p(m - x_i)] = \sum_{i=1}^{n} [x_i - pm] = n\bar{x} - npm,$$

de donde se obtiene que el estimador de máxima verosimilitud también es $\hat{p} = \bar{X}/m$. Claramente es insesgado, pues

$$\mathbb{E}(\hat{p}) = \mathbb{E}(\bar{X}/m) = \mathbb{E}(\bar{X})/m = \mathbb{E}(X_1)/m = mp/m = p.$$

Por ley fuerte de los grandes números, sabemos que $\bar{X} \to \mathbb{E}(X_1) = mp$ casi seguramente cuando $n \to \infty$. Es decir, $\hat{p} = \bar{X}/m \to mp/m = p$ casi seguramente cuando $n \to \infty$.

(b) Bajo el modelo propuesto, la cantidad de tiendas que visita un cliente es una variable $\text{bin}(3, p)$, pues por cada tienda escoge si la visita con probabilidad p e independiente de las otras dos tiendas. Luego, por la parte P2.(a), el estimador de máxima verosimilitud es $\hat{p} = \bar{X}/3$. Agrupando los valores de los X_i de acuerdo a la tabla, obtenemos:

$$\hat{p} = \frac{1}{3}\bar{X} = \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{3\times 64}\times[0\times 6+1\times 30+2\times 18+3\times 10] = \frac{30+36+30}{192} = \frac{96}{192} = \frac{1}{2}.$$

Luego, bajo el modelo propuesto, y utilizando el estimador de máxima verosimlitud para el parámetro p, la variable de la cantidad de tiendas visitadas es una binomial de parámetros $(3, 1/2)$, de modo que $p_i = \mathbb{P}(X = i) = \binom{3}{i}(1/2)^3$, para $i = 0, 1, 2, 3$. La hipótesis nula queda entonces

$$H_0 : p_0 = 1/8,\ p_1 = 3/8,\ p_2 = 3/8,\ p_3 = 1/8,$$

mientras que la hipótesis alternativa es que algún p_i difiere de los anteriores

(c) El estadístico del test de bondad de ajuste es

$$\Delta = n\sum_{i=0}^{3}\frac{(\hat{p}_i - p_i^0)^2}{p_i^0},$$

donde $\hat{p}_i = n_i/n$, con n_i la cantidad observada de resultados del tipo i, y p_i^0 es el valor de p_i bajo H_0. Sabemos que, bajo H_0, este estadístico tiene distribución aproximada chi-cuadrado con $k-2$ grados de libertad (se resta un grado de libertad adicional pues tuvimos que estimar el parámetro p), donde k es la cantidad de posibles resultados de la variables, i.e., $k = 4$. Buscamos la región de rechazo imponiendo el nivel deseado:

$$0{,}1 = \alpha = \mathbb{P}(\Delta > c \mid H_0) \approx \mathbb{P}(\chi_2^2 > c),$$

y de la tabla de la distribución chi-cuadrado, obtenemos $c = 4{,}61$. Por otro lado, el valor observado en la muestra de este estadístico es:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{obs}} &= 64\left[\frac{\left(\frac{6}{64}-\frac{1}{8}\right)^2}{\frac{1}{8}} + \frac{\left(\frac{30}{64}-\frac{3}{8}\right)^2}{\frac{3}{8}} + \frac{\left(\frac{18}{64}-\frac{3}{8}\right)^2}{\frac{3}{8}} + \frac{\left(\frac{10}{64}-\frac{1}{8}\right)^2}{\frac{1}{8}}\right] \\
&= 64\left[\frac{\left(\frac{6}{64}-\frac{8}{64}\right)^2}{\frac{1}{8}} + \frac{\left(\frac{30}{64}-\frac{24}{64}\right)^2}{\frac{3}{8}} + \frac{\left(\frac{18}{64}-\frac{24}{64}\right)^2}{\frac{3}{8}} + \frac{\left(\frac{10}{64}-\frac{8}{64}\right)^2}{\frac{1}{8}}\right] \\
&= 64\times 8\times\frac{1}{64^2}\left[\frac{(6-8)^2}{1} + \frac{(30-24)^2}{3} + \frac{(18-24)^2}{3} + \frac{(10-8)^2}{1}\right] \\
&= \frac{1}{8\times 3}\times[12+36+36+12] \\
&= \frac{96}{24} \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Como este valor no es mayor que el punto de corte $c = 4{,}61$, no se rechaza H_0. Por lo tanto, con los datos de la tabla no hay suficiente evidencia para rechazar H_0 al nivel $\alpha = 10\,\%$.

P3. (a) Consideremos las hipótesis

$$\begin{aligned}
H_0 &: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\
H_1 &: \sigma_A^2 > \sigma_B^2,
\end{aligned}$$

donde σ_A^2 y σ_B^2 son las varianzas de las piezas provenientes de los proveedores A y B, respectivamente. Trabajamos con el estadístico $W = s_A^2/s_B^2$, donde s_A^2 es el estimador insesgado de la varianza para la muestra del proveedor A; ídem para s_B^2. Dada la forma de la hipótesis alternativa, el test se rechazará cuando $W > c$, con c una constante por determinar. Sabemos que, bajo H_0, W tiene distribución $F_{10-1,20-1}$, lo que permite imponer el nivel deseado:

$$0{,}05 = \alpha = \mathbb{P}(W > c|H_0) = \mathbb{P}(F_{9,19} > c),$$

y de la tabla de la distribución F obtenemos $c = 2{,}42$. El valor observado del estadístico es

$$W_{\text{obs}} = \frac{0{,}003}{0{,}001} = 3 > 2{,}42 = c,$$

por lo tanto corresponde rechazar H_0. Es decir, se concluye que el proveedor B efectivamente produce piezas con varianza de grosor estrictamente menor.

(b) 1) Las hipótesis en cuestión son

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta_1 = 0 \\ H_1 &: \beta_1 \neq 0, \end{aligned}$$

donde β_1 es la constante multiplicativa del modelo lineal. Sabemos que el estadístico T_1 que se utiliza para realizar el test tiene distribución t-student con $n-2$ grados de libertad, donde n es la cantidad de datos en la muestra. Como son 2 productos por cada uno de los 4 tamaños, se tiene que $n = 8$. El p-valor corresponde a la probabilidad, bajo H_0, de obtener algo tan o más extremo que lo observado en la muestra, donde en este caso "extremo" significa $|T_1| >$ cte, por la forma que tiene la hipótesis alternativa. Por lo tanto:

$$p\text{-valor} = \mathbb{P}(|T_1| > |T_1^{\text{obs}}| \mid H_0) = \mathbb{P}(|t_6| > 1{,}95) = 2\mathbb{P}(t_6 > 1{,}95)$$

donde hemos usado la simetría de la distribución t-student. Mirando la tabla, obtenemos $\mathbb{P}(t_6 > 1{,}95) \approx 0{,}05$, de modo que p-valor $\approx 0{,}1$. Para el nivel $\alpha = 0{,}05 <$ p-valor, no hay suficiente evidencia estadística para rechazar H_0.

2) Trabajamos con el estadístico T_1, cuya forma es

$$T_1 = C(\hat{\beta}_1 - \beta_1),$$

donde C es un valor que se obtiene de la muestra, cuya forma específica no nos interesa en este caso, pues podemos despejarlo en base a la información que disponemos: bajo la hipótesis $\beta_1 = 0$, sabemos que este estadístico vale 1,95, es decir:

$$1{,}95 = C(3{,}9 - 0), \quad \text{luego} \quad C = \frac{1{,}95}{3{,}9} = \frac{1}{2}.$$

Sabiendo que $T_1 \sim t_6$, imponemos el nivel deseado para un intervalo simétrico con respecto al origen para T_1:

$$95\,\% = \mathbb{P}(T_1 \in [-d, d]) = 1 - 2\mathbb{P}(t_6 > d), \quad \text{es decir,} \quad \mathbb{P}(t_6 > d) = 2{,}5\,\%.$$

De la tabla de la t-student se obtiene $d = 2{,}447$. Despejando β_1 en la inclusión $T_1 = C(\hat{\beta}_1 - \beta_1) \in [-d, d]$, se obtiene el intervalo deseado:

$$\beta_1 \in [\hat{\beta}_1 - d/C, \hat{\beta}_1 + d/C] = [3{,}9 - 2 \times 2{,}447,\ 3{,}9 + 2 \times 2{,}447] = [-0{,}994,\ 8{,}794].$$