Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-2 Probabilidades y Estadística
Primavera 2014

Roberto Cortez
Ignacio López
Dafne Pincheira

Control 2

13 de octubre de 2014
Tiempo: 3 horas

P1. *a*) (3,0 ptos.) Un competidor de salto alto tiene 3 intentos. Si en un intento logra superar la valla, en el siguiente intento la valla se sube 5cm, pero si no lo logra, en el siguiente intento se mantiene la altura. Inicialmente la valla está a una altura de 195cm. Suponga que en cada intento la altura alcanzada por el competidor es una variable uniforme en $[195, 210]$, independiente de los otros intentos. El puntaje del competidor es la altura de la valla más alta exitosamente superada. Sea X la variable aleatoria del puntaje obtenido; obtenga su función de distribución p_X, y calcule $\mathbb{E}(X)$.

b) Sea (X, Y) vector aleatorio con distribución uniforme sobre el triángulo formado por los puntos $a = (-1, 0)$, $b = (2, 0)$ y $c = (0, 1)$. Es decir, $f_{X,Y} = C\mathbb{1}_T(x, y)$, donde $T \subseteq \mathbb{R}^2$ es el triángulo descrito y C es una constante adecuada.

1) (1,5 pto.) Muestre que $f_Y(y) = (2 - 2y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$. *Indicación:* un buen dibujo de la región T puede serle de mucha ayuda.
2) (1,5 pto.) Calcule $\mathbb{E}(X \mid Y)$.

P2. Decimos que una variable aleatoria X tiene distribución de *Rayleigh* con parámetro $\sigma > 0$, si su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{xe^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sigma^2}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

a) (1,5 ptos.) Dado $\lambda > 0$, obtenga la densidad de la variable $Y = X^2/(2\sigma^2\lambda)$.

b) (1,5 ptos.) Muestre que la f.g.m. de X es $M_X(t) = 1 + \sqrt{2\pi}\sigma t e^{\sigma^2 t^2/2}\Phi(\sigma t)$, donde Φ es la función de distribución acumulada de una variable normal estándar, es decir,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

c) (1,5 ptos.) Calcule la esperanza y varianza de X.

d) (1,5 ptos.) Sean U y V variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Muestre que $R = \sqrt{U^2 + V^2}$ posee distribución de Rayleigh con parámetro σ. *Indicación:* muestre que $M_R(t) = M_X(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$, y argumente por qué esto prueba lo buscado; para calcular $M_R(t)$ utilice sin demostrar el hecho que para cualquier función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se tiene que

$$\mathbb{E}(g(U, V)) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(u, v) f_{U,V}(u, v)dudv.$$

P3. *a*) Sean X e Y independientes con distribución normal estándar. Definimos $U = X$ y $V = X/Y$.

1) (1,5 ptos.) Muestre que la función de densidad conjunta de U y V es

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{|u|e^{-u^2(1+1/v^2)/2}}{2\pi v^2}.$$

2) (1,5 ptos.) Muestre que V tiene distribución de Cauchy, es decir, su densidad es $f_V(v) = 1/[\pi(1+v^2)]$.

b) Un cazador sabe que en el sector que él caza se avistan pájaros a tasa de λ pájaros por hora.

1) (1,0 pto.) Encuentre una expresión para la probabilidad que el cazador aviste m o más pájaros en 1 hora.
2) (1,5 ptos.) Suponga ahora que el cazador caza a un pájaro avistado con probabilidad p, independiente de los otros pájaros. Calcule la probabilidad que cace exactamente k pájaros en t horas. *Indicación:* condicione en el número de pájaros avistados.
3) (0,5 ptos.) Llamemos N_t a la cantidad de pájaros cazados hasta el tiempo t. En base a lo obtenido en el ítem anterior, ¿qué puede decir acerca de $(N_t)_{t\geq 0}$?