Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Otoño 2012

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Pauta Control 1

P1. (a) Razonemos por contradicción: supongamos que todos los singleton tienen la misma probabilidad $p \in [0,1]$. Escribiendo Ω como la unión disjunta (y numerable) de sus singletons y aplicando el axioma 3, obtenemos:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega\in\Omega}\{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} p.$$

Si $p > 0$ obtendremos $1 = \infty$, y si $p = 0$ obtendremos $1 = 0$. En cualquier caso se obtiene una contradicción; luego, no todos los singletons pueden tener la misma probabilidad. Además, sí es posible que todos los singleton tengan probabilidad estrictamente positiva. Un ejemplo concreto corresponde a $\Omega = \mathbb{N}$, con la probabilidad dada por $\mathbb{P}(\{k\}) = 2^{-(k+1)} > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$.

(b) Pasando al complemento, obtenemos:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[\bigcup_{i=1}^n E_i\right]^c\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n E_i^c\right) = 1 - \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i^c),$$

donde en el último paso hemos usado que la colección de los complementos es independiente, pues $(E_i)_{i=1}^n$ lo es. Notando que $\mathbb{P}(E_i^c) = 1 - \mathbb{P}(E_i)$, se obtiene el resultado buscado.

(c) Trabajamos en el espacio equiprobable de todos los subconjuntos de 2 elementos de las n posiciones en la fila, correspondientes a los lugares que ocupará el matrimonio. Este espacio tiene $\binom{n}{2}$ elementos, con lo cual la probabilidad buscada es

$$\frac{n-1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n}.$$

El numerador en la fracción de la izquierda corresponde a los subconjuntos de tamaño 2 en que las posiciones están juntas (son $n-1$ pues el primer elemento puede ocupar las posiciones 1 hasta $n-1$). Si se ubican en círculo, entonces las posiciones primera y última también cuentan como si estuvieran juntas, por lo cual hay que agregar 1 elemento más a los $n-1$ ya considerados. Luego, la probabilidad en el caso circular es

$$\frac{n}{\binom{n}{2}} = \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n-1}.$$

Otra forma de resolver el problema es trabajando en el espacio equiprobable con $n!$ elementos de las n permutaciones de las personas. La probabilidad en el caso de la fila es

$$\frac{(n-1)\times 2\times (n-2)!}{n!} = \frac{(n-1)\times 2}{n\times(n-1)} = \frac{2}{n}.$$

El $(n-1)$ en el numerador en la fracción de la izquierda corresponde a las posiciones en que puede ir la pareja, igual que antes; el 2 son los órdenes relativos de la pareja, y el $(n-2)!$ son los órdenes relativos del resto. Para el caso circular es análogo, agregando una posición a las $n-1$ recién consideradas.

P2. (a) Dado $k \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z > k) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \mathbb{P}(Z = i) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z = k+1+i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{k+1+i-1} p \\
&= (1-p)^k p \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i = (1-p)^k p \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula de la serie geométrica. Otra forma de obtener el resultado es recordando que Z representa la cantidad de lanzamientos hasta que se obtiene la primera cara, donde la probabilidad de cara es p. El evento $\{Z > k\}$ corresponde a que la primera cara se obtiene después del lanzamiento k. O equivalentemente, que los primeros k lanzamientos resultan sello, lo cual tiene probabilidad $(1-p)^k$.

(b) Consideremos las variables

$$\begin{aligned}
&M : \text{marca escogida} \\
&X : \text{número de la caída en la que el celular se rompe.}
\end{aligned}$$

Queremos calcular la probabilidad de que M sea A dado que X es mayor que k. Por regla de Bayes, tenemos:

$$\mathbb{P}(M = A \mid X > k) = \frac{\mathbb{P}(X > k \mid M = A)\mathbb{P}(M = A)}{\mathbb{P}(X > k)}.$$

Notemos que cuando la marca escogida es A, la variable X tiene distribución geométrica de parámetro p, por lo cual, utilizando el ítem anterior, se concluye que $\mathbb{P}(X > k \mid M = A) = (1-p)^k$. Además, como la marca se escoge al azar, $\mathbb{P}(M = A) = 1/2$. Para la probabilidad del denominador utilizamos la regla de probabilidades totales:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > k) &= \mathbb{P}(X > k \mid M = A)\mathbb{P}(M = A) + \mathbb{P}(X > k \mid M = B)\mathbb{P}(M = B) \\
&= (1-p)^k \times 1/2 + (1-q)^k \times 1/2,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que X es una variable geométrica de parámetro q cuando la marca es B. La probabilidad buscada es entonces

$$\mathbb{P}(M = A \mid X > k) = \frac{(1-p)^k}{(1-p)^k + (1-q)^k} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^k}.$$

Como $q > p$, se tiene que $(1-q)/(1-p) < 1$. Por lo tanto, lo anterior converge a 1 cuando $k \to \infty$. Esto significa que cuando el celular ha sobrevivido muchas caídas, lo más seguro es que la marca escogida sea la que tiene menor probabilidad de romperse, es decir, la marca A.

(c) Queremos calcular $\mathbb{P}(X > 2k \mid X > k)$. Re-utilizando el cálculo hecho para $\mathbb{P}(X > 2k)$, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > 2k \mid X > k) &= \frac{\mathbb{P}(X > 2k, X > k)}{\mathbb{P}(X > k)}\\ &= \frac{\mathbb{P}(X > 2k)}{\mathbb{P}(X > k)}\\ &= \frac{(1-p)^{2k} \times 1/2 + (1-q)^{2k} \times 1/2}{(1-p)^{k} \times 1/2 + (1-q)^{k} \times 1/2}\\ &= \frac{(1-p)^{2k} + (1-q)^{2k}}{(1-p)^{k} + (1-q)^{k}}.\end{aligned}$$

(d) Como ya sabemos que la marca es A, debemos trabajar con la probabilidad $\mathbb{P}(\cdot \mid M = A)$. Sin embargo, para simplificar la notación, anotaremos simplemente $\mathbb{P}(\cdot)$, entendiendo que ya se sabe que $M = A$.

Queremos calcular la probabilidad de que X sea mayor que las caídas del mes, es decir, $\mathbb{P}(X > Y)$. Siguiendo la indicación, condicionaremos en los posibles resultados de Y, para lo cual utilizamos la regla de probabilidades totales:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > Y) &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > Y \mid Y = i)\mathbb{P}(Y = i)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > i \mid Y = i)\mathbb{P}(Y = i)\\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > i)\mathbb{P}(Y = i),\end{aligned}$$

Donde hemos utilizado la independencia de X e Y. Recordando que $X \sim \mathrm{geom}(p)$ y que $Y \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$, tenemos:

$$\mathbb{P}(X > Y) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^i}{i!} = e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = e^{-\lambda p}.$$

P3. (a) 1) Sea $y \in \mathbb{R}$. Tenemos:

$$p_Y(y) = \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(aX + b = y) = \mathbb{P}\left(X = \frac{y-b}{a}\right) = p_X\left(\frac{y-b}{a}\right).$$

2) Para $k \in \{0, \dots, n\}$, tenemos:

$$p_Y(k) = p_X\left(\frac{k-n}{-1}\right) = p_X(n-k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^{n-(n-k)} = \binom{n}{k}(1-p)^k p^{n-k},$$

lo cual implica que Y es una variable binomial con parámetros n y $1-p$. Si X es la cantidad de caras que aparecen en n lanzamientos de una moneda con probabilidad p de cara, entonces $n - X$ (que es igual a Y) es la cantidad de sellos. Como la probabilidad de sello es $1-p$, intercambiando el rol de caras y sellos es directo que Y debe ser una variable binomial de parámetros n y $1-p$.

(b) 1) El evento $\{X = \infty\}$ corresponde a que no se repite ningún color. La cantidad de formas en que pueden asignarse colores distintos a las m bolitas ordenadas es $n(n-1)\cdots(n-m+1)$. Como el total de formas de asignar colores es n^m, la probabilidad buscada es

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n^m}.$$

Tomando $n = 365$, esto equivale a la probabilidad de que no haya dos personas de cumpleaños un mismo día en un grupo de m personas (en este contexto "pintar" equivale a "escoger un día").

2) La probabilidad buscada es

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)[(n-k+1)^{m-k} - (n-k)^{m-k}]}{n^m}.$$

Los primeros k términos del numerador corresponden a las formas de escoger los colores para las k primeras bolitas de modo que no se repita ninguno. El término entre paréntesis cuadrados corresponde a las formas en que se puede pintar a las $m-k$ bolitas restantes de modo que se utiliza al menos una vez el color de la bolita k-ésima, y no se ocupa ninguno de los $k-1$ primeros colores. Para obtener este término, consideramos primero la cantidad de formas en que se colorean las $m-k$ bolitas sin ocupar los $k-1$ primeros colores ($(n-k+1)^{m-k}$ formas) y le restamos las formas en que además no se utiliza el color k-ésimo ($(n-k)^{m-k}$ formas).