Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-2 Probabilidades y Estadística
Primavera 2014

Roberto Cortez
Ignacio López
Dafne Pincheira

Pauta Control 2

P1. *a*) Llamemos U_1, U_2 y U_3 a las alturas alcanzadas en los intentos 1, 2 y 3, respectivamente. Debido a que siempre se supera la primera valla (pues $U_1 \geq 195$), es claro que X es una variable discreta que toma los valores 195, 200, y 205, dependiendo cuál es la valla más alta exitosamente superada. Tenemos:

$$\begin{aligned} p_X(195) = \mathbb{P}(X = 195) &= \mathbb{P}(\text{no supera la altura 200 en los intentos 2 y 3}) \\ &= \mathbb{P}(U_2 < 200, U_3 < 200) \\ &= \mathbb{P}(U_2 < 200)\mathbb{P}(U_3 < 200) \\ &= 1/9, \end{aligned}$$

donde hemos usado la independencia de los U_i, y el hecho que $\mathbb{P}(U_i < 200) = (200-195)/(210-195) = 1/3$. Similarmente:

$$\begin{aligned} p_X(200) = \mathbb{P}(X = 200) &= \mathbb{P}(\text{supera los 200 pero no los 205}) \\ &= \mathbb{P}(U_2 \geq 200, U_3 < 205) + \mathbb{P}(U_2 < 200, U_3 \geq 200) \\ &= (2/3) \times (2/3) + (1/3) \times (2/3) \\ &= 6/9. \end{aligned}$$

De lo anterior, es directo que $p_X(205) = \mathbb{P}(X = 205) = 2/9$, pues es lo que falta para sumar 1 (también puede calcularse explícitamente con un procedimiento similar). Con la función p_X podemos calcular $\mathbb{E}(X)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x \in R_X} x p_X(x) \\ &= 195 \times (1/9) + 200 \times (6/9) + 205 \times (2/9) \\ &= 1805/9 \\ &= 200 + 5/9. \end{aligned}$$

b) 1) El valor de C debe ser tal que $f_{X,Y}$ integre 1, luego $C = \text{área}(T)^{-1} = 2/3$. Notemos que T corresponde a la intersección de los semiplanos

$$\begin{aligned} S_{ab} &= \{(x, y) : y \geq 0\} \\ S_{ac} &= \{(x, y) : y \leq x + 1\} \\ S_{bc} &= \{(x, y) : y \leq 1 - x/2\}. \end{aligned}$$

Calculemos la densidad marginal de Y: dado $y \in \mathbb{R}$ fijo, tenemos

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)dx = C \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_T(x, y)dx.$$

Notemos que si $(x, y) \in S_{ab}$ entonces $y \geq 0$, y cuando $(x, y) \in S_{ac} \cap S_{bc}$ entonces $y \leq 1$. Luego, para que (x, y) esté en $T = S_{ab} \cap S_{ac} \cap S_{bc}$ es necesario que $0 \leq y \leq 1$, lo cual implica que la indicatriz dentro de la integral es siempre 0 cuando $y \notin [0, 1]$. Para $y \in [0, 1]$, los x

tales que $(x,y) \in T$ son tales que se cumplen las desigualdades que definen los semiplanos S_{ac} y S_{cb}, es decir, $y \leq x+1$ e $y \leq 1-x/2$. Luego, $\mathbb{1}_T(x,y) = 1$ si y sólo si $x \in [y-1, 2-2y]$. Por lo tanto:

$$f_Y(y) = C\int_{y-1}^{2-2y} dx = C[2-2y-(y-1)] = (2/3)[3-3y] = 2-2y.$$

En general, $f_Y(y) = (2-2y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$.

2) Para $y \in [0,1]$, calculemos la densidad condicional de X dado $Y = y$:

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{(2/3)\mathbb{1}_T(x,y)}{2-2y} = \frac{1}{3-3y}\mathbb{1}_{[y-1,2-2y]}(x)$$

donde nuevamente hemos utilizado que $\mathbb{1}_T(x,y) = 1$ si y sólo si $x \in [y-1, 2-2y]$. Por lo tanto, condicional en $Y = y$, X es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[y-1, 2-2y]$. Como la esperanza de una variable uniforme en $[a,b]$ es $(a+b)/2$, se tiene que

$$\mathbb{E}(X \mid Y = y) = \frac{y-1+2-2y}{2} = \frac{1-y}{2}.$$

Sabemos que $\mathbb{E}(X \mid Y)$ corresponde a evaluar la función recién calculada en Y, es decir,

$$\mathbb{E}(X \mid Y) = \frac{1-Y}{2}.$$

P2. *a)* Calculemos la densidad de Y, para lo cual partimos calculando su distribución acumulada:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X^2/(2\sigma^2\lambda) \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq \sqrt{2\sigma^2\lambda y}\right) = \int_0^{\sqrt{2\sigma^2\lambda y}} f_X(x)dx.$$

Derivamos usando el Teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena:

$$f_Y(y) = f_X\left(\sqrt{2\sigma^2\lambda y}\right)\frac{\sqrt{2\sigma^2\lambda}}{2\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{2\sigma^2\lambda y}e^{-2\sigma^2\lambda y/(2\sigma^2)}}{\sigma^2}\cdot\frac{\sqrt{2\sigma^2\lambda}}{2\sqrt{y}} = \lambda e^{-\lambda y}.$$

Lo anterior vale para $y \geq 0$, mientras que para $y < 0$ es directo que $f_Y(y) = 0$. Por lo tanto, $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$. Es decir, $Y \sim \exp(\lambda)$.

b) Veamos:

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx}\frac{xe^{-x^2/(2\sigma^2)}}{\sigma^2}dx = \frac{e^{\sigma^2t^2/2}}{\sigma^2}\int_0^\infty xe^{-\frac{(x-\sigma^2t)^2}{2\sigma^2}}dx, \tag{1}$$

donde en el último paso hemos completado el cuadrado de binomio dentro de la exponencial. Haciendo el cambio de variable $z = (x-\sigma^2t)/\sigma$, obtenemos:

$$\begin{aligned}= \frac{e^{\sigma^2t^2/2}}{\sigma^2}\int_{-\sigma t}^\infty (\sigma z+\sigma^2t)e^{-z^2/2}\sigma dz &= e^{\sigma^2t^2/2}\left[\int_{-\sigma t}^\infty ze^{-z^2/2} + \sigma t\int_{-\sigma t}^\infty e^{-z^2/2}\right] \\ &= e^{\sigma^2t^2/2}\left[e^{-\sigma^2t^2/2} + \sqrt{2\pi}\sigma t\Phi(\sigma t)\right],\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos calculado la primera integral utilizado el hecho que $-e^{-z^2/2}$ es la primitiva de $ze^{-z^2/2}$, y en la segunda integral hemos usado que $\sqrt{2\pi}\Phi(x) = \int_x^\infty e^{-z^2/2}$ (se prueba sabiendo que si Z es normal estándar, entonces $-Z$ también lo es). Obtenemos finalmente $M_X(t) = 1 + \sqrt{2\pi}\sigma te^{\sigma^2t^2/2}\Phi(\sigma t)$.

c) Derivamos M_X, usando que $\Phi'(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$:

$$\begin{aligned}\frac{dM_X(t)}{dt} &= \sqrt{2\pi}\sigma\left[e^{\sigma^2t^2/2}\Phi(\sigma t) + \sigma^2t^2e^{\sigma^2t^2/2}\Phi(\sigma t) + \sigma t e^{\sigma^2t^2/2}\Phi'(\sigma t)\right]\\ &= \sqrt{2\pi}\sigma(1+\sigma^2t^2)e^{\sigma^2t^2/2}\Phi(\sigma t) + \sigma^2 t.\end{aligned}$$

Notar que $\Phi(0) = 1/2$. Evaluando en $t = 0$ la expresión anterior, por las propiedades de la f.g.m. obtenemos que el primer momento de X es $\mathbb{E}(X) = \sigma\sqrt{\pi/2}$. Para el segundo momento, derivamos nuevamente:

$$\begin{aligned}\frac{d^2M_X(t)}{dt^2} &= \sqrt{2\pi}\sigma\left[2\sigma^2te^{\sigma^2t^2/2}\Phi(\sigma t) + \sigma^2(t+\sigma^2t^2)e^{\sigma^2t^2/2}\Phi(\sigma t) + \sigma(1+\sigma^2t)e^{\sigma^2t^2/2}\Phi'(\sigma t)\right] + \sigma^2\\ &= \sqrt{2\pi}\sigma\left[3\sigma^2t + \sigma^4t^2\right]e^{\sigma^2t^2/2}\Phi(\sigma t) + 2\sigma^2 + \sigma^4 t.\end{aligned}$$

Evaluando en $t = 0$, tenemos que $\mathbb{E}(X^2) = 2\sigma^2$. La varianza es entonces

$$\operatorname{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 2\sigma^2 - \pi\sigma^2/2 = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2.$$

d) Sabemos que $f_{U,V}(u,v) = f_U(u)f_V(v) = e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}/(2\pi\sigma^2)$, por independencia de U y V. Utilizando la indicación y pasando a coordenadas polares, tenemos:

$$\begin{aligned}M_R(t) &= \mathbb{E}(e^{\sqrt{U^2+V^2}t})\\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{u^2+v^2}t}e^{-\frac{u^2+v^2}{2\sigma^2}}dudv\\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{rt}e^{-r^2/(2\sigma^2)}rdrd\theta\\ &= \frac{1}{\sigma^2}\int_0^{\infty} e^{rt}e^{-r^2/(2\sigma^2)}rdr.\end{aligned}$$

Esta expresión es exactamente la misma de la primera igualdad de (1), con r en lugar de x como variable de integración. Luego, $M_X(t) = M_R(t)$ para todo t. Como la f.g.m. caracteriza la distribución, necesariamente R tiene distribución de Rayleigh de parámetro σ.

P3. *a)* 1) Se tiene que $(U,V) = g(X,Y)$, donde $g(x,y) = (x, x/y)$. El teorema del cambio de variables (método del Jacobiano) nos dice que

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u,v))|\det(Jg^{-1}(u,v)|.$$

En nuestro caso es directo ver que g es su propia inversa, por lo cual $g^{-1}(u,v) = (u, u/v)$ y

$$Jg^{-1}(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/v & -u/v^2 \end{bmatrix}$$

y luego $|\det(Jg^{-1}(u,v))| = |u|/v^2$. Como X e Y son normales estándar independientes, su densidad conjunta es el producto de las densidades marginales, es decir, $(1/2\pi)e^{-(x^2+y^2)/2}$. Reemplazando todo esto en la fórmula que entrega el teorema, obtenemos:

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{|u|}{v^2}\frac{e^{-(u^2+(u/v)^2)/2}}{2\pi} = \frac{|u|e^{-u^2(1+1/v^2)/2}}{2\pi v^2}.$$

2) Calculemos la densidad marginal de V:

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|e^{-u^2(1+1/v^2)/2}}{2\pi v^2}du = \frac{1}{2\pi v^2}2\int_0^{\infty} ue^{-u^2(1+1/v^2)/2}du,$$

donde la última igualdad se debe a la simetría en u. Hacemos el cambio de variable $w = u\sqrt{1+1/v^2}$ y de lo anterior se obtiene

$$f_V(v) = \frac{1}{\pi v^2}\int_0^{\infty} \frac{we^{-w^2/2}}{\sqrt{1+1/v^2}}\frac{dw}{\sqrt{1+1/v^2}} = \frac{1}{\pi(1+v^2)}\int_0^{\infty} we^{-w^2/2}dw = \frac{1}{\pi(1+v^2)},$$

donde la integral vale 1, pues corresponde a $-e^{-w^2/2}$ evaluado en 0 e ∞. Luego, V es una variable con distribución de Cauchy.

b) 1) Sea S_k el instante en que se avista el k-ésimo pájaro, el cual sabemos que tiene distribución gamma(k,λ). Claramente, el evento en que se avistan m o más pájaros en 1 hora corresponde a que el m-ésimo pájaro fue avistado antes del instante $t = 1$. Luego, la probabilidad buscada es

$$\mathbb{P}(S_m \leq 1) = \int_0^1 \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{m-1}}{\Gamma(m)}dx.$$

Alternativamente: si M_t denota la cantidad de pájaros avistados hasta el instante t, sabemos que M_t es una variable con distribución Poisson(λt). Luego, $M_1 \sim$ Poisson(λ), y la probabilildad buscada también corresponde a

$$\mathbb{P}(M_1 \geq m) = \sum_{k=m}^{\infty} \mathbb{P}(M_1 = k) = e^{-\lambda}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

2) Llamemos N_t a la cantidad de pájaros cazados en t horas. Si se sabe que en t horas se avistaron m pájaros, entonces la cantidad de pájaros cazados corresponde a una variable binom(m,p), pues cada pájaro es cazado con probabilidad p e independiente del resto. Notar además que para que se cacen k pájaros es necesario que se hayan avistado al menos k. Siguiendo la indicación:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = k) &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_t = k \mid M_t = m)\mathbb{P}(M_t = m) \\
&= \sum_{m=k}^{\infty} \binom{m}{k} p^k(1-p)^{m-k}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^m}{m!} \\
&= \frac{p^k e^{-\lambda t}}{k!}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{(1-p)^{m-k}(\lambda t)^m}{(m-k)!} \\
&= \frac{p^k e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(1-p)^m(\lambda t)^m}{m!}.
\end{aligned}$$

Notar que la última sumatoria es igual a $e^{(1-p)\lambda t}$. Obtenemos entonces

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{p^k e^{-\lambda t}(\lambda t)^k e^{(1-p)\lambda t}}{k!} = e^{-p\lambda t}\frac{(p\lambda t)^k}{k!}.$$

3) Lo obtenido en la parte anterior nos dice que N_t es una variable aleatoria de Poisson de parámetro $p\lambda t$. Esto es un indicio de que la colección $(N_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson con tasa $p\lambda$.