Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Primavera 2012

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Control 1

3 de septiembre de 2012
Tiempo: 3 horas

P1. (a) 20 turistas ingleses indistinguibles entre sí y 20 turistas franceses indistinguibles entre sí (pero distinguibles de los ingleses) suben a un bus vacío con 60 asientos distinguibles ubicados de a pares. ¿De cuántas formas pueden ubicarse los turistas si

1) (1,0 pto.) no hay restricciones en la forma de sentarse?
2) (1,0 pto.) los turistas franceses se ubican de a pares?
3) (1,0 pto.) se utiliza al menos un asiento de cada par?

(b) (3,0 ptos.) Se lanza un dado equilibrado con n caras numeradas de 1 a n, y se va anotando el resultado obtenido. Se continúa lanzando el dado hasta que se obtiene un resultado que ya se anotó en algún lanzamiento previo. Sea X la variable aleatoria que denota la cantidad total de lanzamientos. ¿Cuál es el rango de la variable? Calcule su función distribución.

P2. (a) La probabilidad de que un fósforo en buen estado efectivamente se encienda cuando se intenta prenderlo es p, independiente de los otros intentos, mientras que un fósforo en mal estado nunca enciende. De una caja con n fósforos buenos y m malos usted extrae un fósforo al azar.

1) (1,0 pto.) Si en el primer intento el fósforo no prende, ¿cuál es la probabilidad de que esté malo?
2) (1,0 pto.) Aún suponiendo que no enciende en el primer intento, ¿cuál es la probabilidad que encienda en el siguiente intento?
3) (1,0 pto.) Usted planea probar el fósforo k veces, y si no enciende, usted lo deshecha. Sea P_k la probabilidad de que al deshechar el fósforo éste sea bueno. Dado $\alpha \in (0,1)$, calcule el el mínimo k tal que P_k es menor o igual a α.

(b) (3,0 ptos.) Se dice que una variable aleatoria S tiene una distribución *chi-cuadrado con 1 grado de libertad*, anotado $S \sim \chi_1^2$, si su función densidad es

$$f_S(x) = \frac{x^{-1/2}e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Pruebe que si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ entonces $Z^2 \sim \chi_1^2$.

P3. (a) Sea $F : \mathbb{R} \to (0,1)$ la función de distribución acumulada de alguna variable aleatoria. Suponga que F es invertible.

1) (1,5 ptos.) Sea X variable aleatoria tal que $F_X = F$. ¿Qué variable aleatoria es $F(X)$?
2) (1,5 ptos.) Sea Y variable aleatoria uniforme en $[0,1]$. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria $F^{-1}(Y)$?

(b) Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad *no atómico*, es decir, cumple que $\forall B \subseteq \Omega$ con $\mathbb{P}(B) > 0$, $\exists A \subseteq B$ tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$.

1) (1,0 pto.) Muestre que $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$, $\forall x \in \Omega$.
2) (1,0 pto.) Muestre que Ω no puede ser finito ni numerable.
3) (1,0 pto.) Muestre que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall B \subseteq \Omega$ con $\mathbb{P}(B) > 0$, $\exists A \subseteq B$, tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \varepsilon$. *Indicación:* muestre el resultado para ε de la forma $\mathbb{P}(B)/2^n$.