Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Primavera 2012

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Control 3

12 de noviembre de 2012
Tiempo: 3 horas

P1. La duración de unas determinadas baterías es una variable aleatoria $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con parámetros desconocidos. Se prueban 16 baterías, obteniendo una duración promedio de 7,0 y con s^2 (el estimador insesgado de la varianza) igual a 0,9.

(a) (1,5 ptos.) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para μ.

(b) (1,5 ptos.) Encontrar un intervalo de confianza al 95 % para σ^2.

(c) (1,5 ptos.) Suponga que se sabe que la varianza real es $\sigma^2 = 1$. ¿Cuál es el intervalo de confianza para μ en este caso?

(d) (1,5 ptos.) Si se desea reducir un 20 % el largo del intervalo anterior, manteniendo el nivel de confianza, ¿cuántas baterías adicionales se deberían probar?

P2. Considere una m.a.s. $X_1, \dots, X_n$ proveniente de una distribución Gamma(θ, λ), con ambos parámetros desconocidos.

(a) (2,0 ptos.) Definimos $Y_i = \log(X_i)$. Sean $\hat{\theta}_{\text{mv}}$ y $\hat{\lambda}_{\text{mv}}$ los estimadores de máxima verosimilitud de θ y λ, respectivamente. Muestre que ellos satisfacen las ecuaciones

$$\frac{\Gamma'(\hat{\theta}_{\text{mv}})}{\Gamma(\hat{\theta}_{\text{mv}})} - \log(\hat{\theta}_{\text{mv}}) = \overline{Y} - \log \overline{X} \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}_{\text{mv}} = \frac{\hat{\theta}_{\text{mv}}}{\overline{X}}.$$

(b) (2,0 ptos.) Denotemos m_k al k-ésimo momento muestral, es decir, $m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k$. Muestre que los estimadores de los momentos de θ y λ corresponden a

$$\hat{\theta}_{\text{mom}} = \frac{m_1^2}{m_2 - m_1^2} \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}_{\text{mom}} = \frac{m_1}{m_2 - m_1^2}.$$

(c) (2,0 ptos.) Argumente por qué m_1 y m_2 convergen casi seguramente a θ/λ y $\theta(1+\theta)/\lambda^2$ cuando $n \to \infty$, respectivamente. Concluya que $\hat{\theta}_{\text{mom}}$ y $\hat{\lambda}_{\text{mom}}$ convergen casi seguramente a θ y λ cuando $n \to \infty$, respectivamente-.

P3. (a) (3,0 ptos.) El dueño de una revista afirma que, de acuerdo a la experiencia de años anteriores, el 60 % de las personas suscritas a la revista renuevan su suscripción, pero el editor de la revista afirma que las preferencias del público han cambiado y que el porcentaje de renovación es estrictamente menor que 60 %. Para resolver esta discrepancia, se toma una muestra de 200 personas con suscripción y se observa que 108 de ellas la renovaron este año. Para $\alpha = 2{,}5\,\%$, ¿debe rechazarse la afirmación del dueño y fallar a favor del editor?

(b) Un avión de transporte de carga tiene capacidad de 6.000kg. Cada potencial cliente desea transportar una cierta cantidad de carga, que modelamos como variables aleatorias i.i.d. De acuerdo a la experiencia, la esperanza del peso de la carga de un cliente es de 100kg. Se desea calcular un número n^* (lo más grande posible) de clientes por viaje de manera que la probabilidad de que la carga total supere la capacidad del avión sea a lo más un 2,28 %.

1) (1,5 ptos.) Usando la desigualdad de Markov, encuentre un valor para n^*.

2) (1,5 ptos.) Estudios posteriores muestran que la raíz de la varianza del peso de la carga de un cliente es de 200kg. Aproximando con el TCL, encuentre un nuevo n^*.