Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Primavera 2012

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Pauta Control 2

P1. (a) Sea X la variable aleatoria que denota los puntos obtenidos, e Y la distancia de la flecha al centro del blanco. X es discreta, con $R_X = \{0, 3, 5, 10\}$, luego

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in R_X} k p_X(k) = 0 \cdot p_X(0) + 3 \cdot p_X(3) + 5 \cdot p_X(5) + 10 \cdot p_X(10).$$

La cantidad $p_X(10)$ corresponde a la probabilidad de que el puntaje sea 10, lo que equivale a la probabilidad de que la flecha esté a menos de 5cm del centro. Es decir, $p_X(10) = \mathbb{P}(Y \in [0, 5]) = 5/50$, donde hemos usado que $Y \sim \text{unif}(0, 50)$. Aplicando lo mismo para los otros posibles puntajes, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= 0 \cdot \mathbb{P}(Y \in [25, 50]) + 3 \cdot \mathbb{P}(Y \in [15, 25]) + 5 \cdot \mathbb{P}(Y \in [5, 15]) + 10 \cdot \mathbb{P}(Y \in [0, 5]) \\
&= 0 + 3 \cdot \frac{10}{50} + 5 \cdot \frac{10}{50} + 10 \cdot \frac{5}{50} \\
&= \frac{30 + 50 + 50}{50} \\
&= \frac{13}{5}.
\end{aligned}$$

(b) 1) Se tiene que $(U, V) = g(X, Y)$, donde $g(x, y) = (x, x/y)$. El teorema del cambio de variables (método del jacobiano) nos dice que

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u, v)) |\det(Jg^{-1}(u, v))|.$$

En nuestro caso es directo ver que g es su propia inversa, por lo cual $g^{-1}(u, v) = (u, u/v)$ y entonces

$$Jg^{-1}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/v & -u/v^2 \end{bmatrix}$$

y luego $|\det(Jg^{-1}(u, v))| = |u|/v^2$. Como X e Y son normales estándar independientes, su densidad conjunta es el producto de las densidades marginales, es decir, $f_{X,Y}(x, y) = (1/2\pi) e^{-(x^2+y^2)/2}$. Reemplazando todo esto en la fórmula que entrega el teorema, obtenemos:

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{|u| e^{-(u^2 + u^2/v^2)/2}}{2\pi v^2} = \frac{|u| e^{-u^2(1+1/v^2)/2}}{2\pi v^2}.$$

2) Calculemos la densidad marginal de V:

$$\begin{aligned}
f_V(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u| e^{-u^2(1+1/v^2)/2}}{2\pi v^2} du \\
&= \frac{1}{2\pi v^2} 2 \int_0^{\infty} u e^{-u^2(1+1/v^2)/2} du,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la simetría en u. Hacemos el cambio de variable $w = u\sqrt{1+1/v^2}$ y de lo anterior se obtiene

$$
\begin{aligned}
f_V(v) &= \frac{1}{\pi v^2}\int_0^\infty \frac{we^{-w^2/2}}{\sqrt{1+1/v^2}}\frac{dw}{\sqrt{1+1/v^2}} \\
&= \frac{1}{\pi(1+v^2)}\int_0^\infty we^{-w^2/2}dw \\
&= \frac{1}{\pi(1+v^2)},
\end{aligned}
$$

donde la última integral vale 1, pues corresponde a $-e^{-w^2/2}$ evaluado en 0 e ∞. Luego, V es una variable con distribución de Cauchy.

P2. (a) La densidad de X se obtiene derivando F_X, es decir,

$$
f_X(x) = \frac{1}{\beta}e^{-(x-\mu)/\beta}e^{-e^{-(x-\mu)/\beta}}, \ \forall x \in \mathbb{R}.
$$

Ahora calculemos $M_X(t)$ utilizando lo anterior y el cambio de variable $y = (x-\mu)/\beta$:

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_{-\infty}^\infty e^{tx}f_X(x)dx \\
&= \frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^\infty e^{tx}e^{-(x-\mu)/\beta}e^{-e^{-(x-\mu)/\beta}}dx \\
&= \frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^\infty e^{t(\mu+\beta y)}e^{-y}e^{-e^{-y}}\beta dy \\
&= e^{\mu t}\int_{-\infty}^\infty [e^{-y}]^{-\beta t}e^{-y}e^{-e^{-y}}dy \\
&= e^{\mu t}\int_\infty^0 z^{-\beta t}ze^{-z}\left[\frac{-1}{z}\right]dz,
\end{aligned}
$$

donde en el último paso hemos utilizado el cambio de variable $z = e^{-y}$. Finalmente, obtenemos lo buscado:

$$
M_X(t) = e^{\mu t}\int_0^\infty z^{[1-\beta t]-1}e^{-z}dz = e^{\mu t}\Gamma(1-\beta t).
$$

(b) Derivemos M_X:

$$
\frac{dM_X}{dt}(t) = \mu e^{\mu t}\Gamma(1-\beta t) - \beta e^{\mu t}\Gamma'(1-\beta t).
$$

Derivando nuevamente:

$$
\frac{d^2M_X}{dt^2}(t) = \mu^2 e^{\mu t}\Gamma(1-\beta t) - \beta\mu e^{\mu t}\Gamma'(1-\beta t) - \beta\mu e^{\mu t}\Gamma'(1-\beta t) + \beta^2 e^{\mu t}\Gamma''(1-\beta t).
$$

Recordemos que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, en particular $\Gamma(1) = 1$ (también puede obtenerse evaluando la intergral que define Γ). Evaluando en $t = 0$ las derivadas anteriores, obtenemos los momentos de X de orden 1 y 2:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{dM_X}{dt}(0) = \mu\Gamma(1) - \beta\Gamma'(1) = \mu - \beta\Gamma'(1), \\
\mathbb{E}(X^2) &= \frac{d^2M_X}{dt^2}(0) = \mu^2\Gamma(1) - 2\beta\mu\Gamma'(1) + \beta^2\Gamma''(1) = \mu^2 - 2\beta\mu\Gamma'(1) + \beta^2\Gamma''(1).
\end{aligned}
$$

Finalmente, obtenemos la varianza:

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mu^2 - 2\beta\mu\Gamma'(1) + \beta^2\Gamma''(1) - [\mu - \beta\Gamma'(1)]^2 \\ &= \mu^2 - 2\beta\mu\Gamma'(1) + \beta^2\Gamma''(1) - [\mu^2 - 2\mu\beta\Gamma'(1) + \beta^2\Gamma'(1)^2] \\ &= \beta^2[\Gamma''(1) - \Gamma'(1)^2].\end{aligned}$$

(c) Calculemos F_Y:

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \mathbb{P}(\alpha X + \nu \le y) \\ &= \mathbb{P}(X \le (y-\nu)/\alpha) \\ &= F_X((y-\nu)/\alpha) \\ &= e^{-e^{-(\frac{y-\nu}{\alpha}-\mu)/\beta}} \\ &= e^{-e^{-(y-[\alpha\mu+\nu])/(\alpha\beta)}},\end{aligned}$$

lo cual corresponde a la distribución acumulada de una variable Gumbel de parámetros $\alpha\mu + \nu$ y $\alpha\beta$, como desábamos probar. Una forma alternativa de obtener lo buscado es calculando M_Y:

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{t(\alpha X+\nu)}) = e^{\nu t}\mathbb{E}(e^{(\alpha t)X}) = e^{\nu t}M_X(\alpha t) = e^{\nu t}e^{\mu\alpha t}\Gamma(1-\beta\alpha t),$$

es decir, $M_Y(t) = e^{(\alpha\mu+\nu)t}\Gamma(1-\alpha\beta t)$, lo cual corresponde a la función generadora de momentos de una variable Gumbel de parámetros $\alpha\mu+\nu$ y $\alpha\beta$, por la parte P2.(a). Como la función generadora de momentos caracteriza la distribución de la variable, necesariamente Y tiene la distribución deseada.

(d) Calculemos F_Y. Para $y > 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \mathbb{P}(e^{-(X-\mu)/\beta} \le y) \\ &= \mathbb{P}(X \ge \mu - \beta\log y) \\ &= 1 - F_X(\mu - \beta\log y) \\ &= 1 - e^{-e^{-([\mu-\beta\log y]-\mu)/\beta}} \\ &= 1 - e^{-y}.\end{aligned}$$

Derivando, obtenemos $f_Y(y) = e^{-y}$ para $y > 0$. Como la variable Y es positiva, para $y \le 0$ se tiene $F_Y(y) = 0$. Luego, $f_Y(y) = e^{-y}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y)$. Es decir, Y es una variable exponencial de parámetro $\lambda = 1$.

P3. (a) Llamemos N_t al proceso de Poisson que representa la llegada de los clientes, es decir, N_t es la cantidad de clientes que han llegado al almacén hasta el tiempo t. La probabilidad buscada corresponde a $\mathbb{P}(N_4 \in \{0,1,2\})$. Sabemos que $N_t \sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$, luego N_4 es una variable Poisson de parámetro $0{,}5 \times 4 = 2$. Entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_4 \in \{0,1,2\}) &= \mathbb{P}(N_4 = 0) + \mathbb{P}(N_4 = 1) + \mathbb{P}(N_4 = 2) \\ &= e^{-2}\frac{2^0}{0!} + e^{-2}\frac{2^1}{1!} + e^{-2}\frac{2^2}{2!} \\ &= e^{-2}[1+2+2] \\ &= 5e^{-2}.\end{aligned}$$

(b) Siguiendo la indicación, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \leq t, s < T+S) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(T \leq t, s < T+S \mid T = x) f_T(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(x \leq t, s < x+S \mid T = x) \lambda e^{-\lambda x} dx,\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos utilizado que $T \sim \exp(\lambda)$. Notemos que S y T son independientes, pues corresponden a los tiempos que transcurren entre dos eventos consecutivos en un proceso de Poisson (los cuales son independientes por definición). Luego, la probabilidad dentro de la integral no depende de la condición $T = x$. Además, dicha probabilidad vale 0 si $x > t$, y vale $\mathbb{P}(s - x < S)$ si $x \leq t$. Usando que S también es una variable exponencial de parámetro λ, obtenemos lo buscado:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \leq t, s < T+S) &= \int_0^t \mathbb{P}(s - x < S) \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^t e^{-\lambda(s-x)} \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda e^{-\lambda s} \int_0^t dx \\ &= \lambda t e^{-\lambda s}.\end{aligned}$$

(c) Que llegue un solo cliente en $[0, s]$ significa que el primer cliente llegó en el tiempo s ó antes, (lo cual corresponde al evento $T \leq s$), y que el segundo cliente llegó después del tiempo s (correspondiente al evento $s < T + S$, pues $T + S$ es el instante en que llega el segundo cliente). Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \leq t \mid \text{llega un solo cliente en } [0, s]) &= \mathbb{P}(T \leq t \mid T \leq s < T+S) \\ &= \frac{\mathbb{P}(T \leq t, T \leq s < T+S)}{\mathbb{P}(T \leq s < T+S)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(T \leq t, s < T+S)}{\mathbb{P}(T \leq s < T+S)},\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos eliminado la desigualdad $T \leq s$, la cual es redundante con la desigualdad $T \leq t$, pues $t \leq s$. Utilizando la parte anterior, obtenemos:

$$\mathbb{P}(T \leq t \mid \text{llega un solo cliente en } [0, s]) = \frac{\lambda t e^{-\lambda s}}{\lambda s e^{-\lambda s}} = \frac{t}{s}.$$

Como función de t (s está fijo), lo anterior corresponde exactamente a la función de distribución acumulada de una variable uniforme en el intervalo $[0, s]$. Luego, condicional en que llegue un solo cliente en $[0, s]$, la variable T tiene distribución uniforme en $[0, s]$.