Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-2 Probabilidades y Estadística
Primavera 2014

Roberto Cortez
Ignacio López
Dafne Pincheira

Control 3

10 de noviembre de 2014
Tiempo: 3 horas

P1. *a)* Sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. proveniente de una Gamma(θ, λ), donde $\theta > 1$ es conocido.

1) (1,5 ptos.) Muestre que los estimadores de λ del método de los momentos y el de máxima verosimilitud coinciden con $\hat{\lambda} = \theta/\overline{X}$.
2) (1,5 ptos.) Muestre que $\mathbb{E}(\hat{\lambda}) = \lambda n\theta/(n\theta - 1)$ y modifique $\hat{\lambda}$ para obtener un estimador insesgado. *Indicación:* utilice el hecho que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ tiene distribución Gamma$(n\theta, \lambda)$; para calcular la integral identifique la densidad de una variable Gamma adecuada.

b) (3,0 ptos.) El voltaje de salida de un cierto circuito eléctrico debería ser 130 de acuerdo a las especificaciones técnicas. Se toma una muestra de 40 mediciones independientes del voltaje de este circuito, y se obtiene un promedio de 128,6 y una desviación estándar (es decir, la raíz del estimador insesgado de la varianza) de 2,1. Realice un test al nivel 5 % para la hipótesis de que la esperanza del voltaje es igual a 130 versus la alternativa de que es menor estricto que 130.

P2. El tiempo (en días) que un cierto tipo de componente electrónica tarda en fallar es una variable aleatoria con densidad $f(x) = 2x\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$. Cuando la componente falla, es inmediatamente reemplazada por otra componente independiente del mismo tipo. Denotemos X_i la duración de la i-ésima componente usada, y sea $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ el instante en que ocurre la n-ésima falla.

a) (1,5 ptos.) Muestre que $\mathbb{E}(X_1) = 2/3$ y $\text{var}(X_1) = 1/18$.

b) (1,5 ptos.) Suponga (en este ítem solamente) que usted dispone de 15 componentes. Usando la desigualdad de Chebyshev, encuentre una cota inferior para la probabilidad de que la última componente falle pasados los 8 días y antes de 12.

c) (1,5 ptos.) ¿Cuántas componentes se necesitan para que, con probabilidad aproximada de un 90 %, la duración promedio sea mayor que 14 horas? Utilice el TCL.

d) (1,5 ptos.) Se define $r \in \mathbb{R}$ como la *tasa asintótica de falla*, es decir $r = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{S_n}$. Calcule r explícitamente.

P3. El tiempo de vida de un cierto microorganismo se modela como una variable normal con parámetros μ y σ^2 desconocidos. En un laboratorio, usted toma una muestra aleatoria simple con $n = 16$ realizaciones de esta variable, y obtiene un promedio de 20,0 y un estimador insesgado de la varianza de 8,1.

a) (1,5 ptos.) Obtenga un intervalo de confianza para μ al nivel 95 %.

b) (1,5 ptos.) Obtenga un intervalo de confianza para σ^2 al nivel 95 %.

c) (1,5 ptos.) Una compañera de laboratorio toma una muestra de tamaño $m = 20$, obteniendo el mismo promedio de 20,0 y un estimador insesgado de la varianza de 10,0. Si esta muestra se *consolida* con la suya (es decir, se trabaja con el total de $n + m = 36$ datos), ¿cuál es el nuevo intervalo de confianza para μ al mismo nivel 95 %? *Indicación:* primero muestre que, para la muestra consolidada, el promedio es 20,0 y el estimador insesgado de la varianza es 8,9.

d) (1,5 ptos.) Un reciente estudio realizado por otro prestigioso laboratorio muestra que para todo efecto práctico, la varianza real del tiempo de vida del microorganismo puede asumirse igual a $\sigma^2 = 9,0$. Usando la muestra consolidada (con $n + m = 36$ datos), ¿cuál es ahora el intervalo de confianza para μ al mismo nivel 95 %?