



PAUTA CONTROL # 3

- P1.** a) Se tiene que $(U, V) = g(X, Y)$, donde $g(x, y) = (x, x/y)$. El teorema del cambio de variables nos dice que

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u, v)) |\det(Dg^{-1}(u, v))|.$$

En nuestro caso es directo ver que g es su propia inversa, por lo cual $g^{-1}(u, v) = (u, u/v)$ y

$$Dg^{-1}(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/v & -u/v^2 \end{bmatrix}$$

y luego $|\det(Dg^{-1}(u, v))| = |u|/v^2$. Como X e Y son normales estándar independientes, su densidad conjunta es el producto de las densidades marginales, es decir, $(1/2\pi)e^{-(x+y)^2/2}$. Reemplazando todo esto en la fórmula que entrega el teorema, obtenemos:

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{|u|e^{-(u+u/v)^2/2}}{2\pi v^2}.$$

Calculemos la densidad marginal de V :

$$f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v) du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|u|e^{-(u+u/v)^2/2}}{2\pi v^2} du = \frac{1}{2\pi v^2} 2 \int_0^{\infty} ue^{-(u+u/v)^2/2} du,$$

donde la última igualdad se debe a la simetría en u . Hacemos el cambio de variable $w = u\sqrt{1+1/v^2}$ y lo anterior se obtiene

$$f_V(v) = \frac{1}{\pi v^2} \int_0^{\infty} \frac{we^{-w^2/2}}{\sqrt{1+1/v^2}} \frac{dw}{\sqrt{1+1/v^2}} = \frac{1}{\pi(1+v^2)} \int_0^{\infty} we^{-w^2/2} dw = \frac{1}{\pi(1+v^2)},$$

donde la integral vale 1, pues corresponde a $-e^{-w^2/2}$ evaluado en 0 e ∞ . Luego, V es una variable con distribución de Cauchy.

- b) La densidad condicional de X dado Y es

$$f_X(x|Y=y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Calculemos la densidad marginal de Y :

$$f_Y(y) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} dx = e^{-y} (-e^{-x/y}) \Big|_{x=0}^{x=\infty} = e^{-y}.$$

Por lo tanto, para $x, y > 0$ obtenemos:

$$f_X(x|Y=y) = \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} \frac{1}{e^{-y}} = \frac{e^{-x/y}}{y}.$$

Además:

$$P(X > 1|Y=y) = \int_1^{\infty} f_X(x|Y=y) dx = \int_1^{\infty} \frac{e^{-x/y}}{y} dx = -e^{-x/y} \Big|_{x=1}^{x=\infty} = e^{-1/y}.$$

- P2.** a) Llamemos X al puntaje que obtiene el alumno en el examen, y sean $\mu = E(X)$, $\sigma^2 = \text{var}(X)$.

1) Aplicando desigualdad de Markov:

$$P(X \geq 85) \leq \frac{E(X)}{85} = 75/85.$$

2) Aplicando desigualdad de Chebyshev:

$$P(X \in (65, 85)) = P(|X - 75| < 10) = 1 - P(|X - \mu| \geq 10) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{10^2} = 1 - \frac{25}{100} = 0,75.$$

3) Sean X_1, \dots, X_n los resultados de n alumnos, y sea \bar{X} su promedio. Tenemos:

$$P(\bar{X} \in (70, 80)) = P(|\bar{X} - 75| < 5) = 1 - P(|\bar{X} - \mu| > 5),$$

donde μ también es la esperanza de \bar{X} . Además, $\text{var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$. Luego, aplicando Chebyshev obtenemos:

$$P(\bar{X} \in (70, 80)) \geq 1 - \frac{\text{var}(\bar{X})}{5^2} = 1 - \frac{25}{25n} = 1 - \frac{1}{n}.$$

Por lo tanto, si se desea que esta probabilidad sea al menos de un 99 %, basta imponer que $1 - 1/n = 0,99$, es decir, $n = 100$. Ahora, obtengamos un resultado utilizando el teorema del límite central:

$$P(\bar{X} \in (70, 80)) = P(|\bar{X} - 75| < 5) = P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < \frac{5}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \approx P(|Z| < \sqrt{n}) = 1 - 2P(Z \geq \sqrt{n}),$$

donde hemos aproximado la distribución de $(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ por una normal estándar Z , de acuerdo al teorema del límite central. Imponiendo que lo anterior es igual a 0,99 y despejando, debe tenerse que

$$P(Z \geq \sqrt{n}) = 0,005,$$

por lo cual \sqrt{n} debe ser similar a 2,58, de acuerdo a la tabla de la normal estándar. Es decir, $n \approx 6,65$, luego $n = 7$.

b) 1) Calculemos el valor esperado de X con densidad f :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{\theta}^{\infty} xe^{-(x-\theta)}dx = \int_0^{\infty} (y+\theta)e^{-y}dy = \int_0^{\infty} ye^{-y}dy + \theta \int_0^{\infty} e^{-y}dy = 1 + \theta,$$

donde la primera integral vale 1 porque es la esperanza de una variable $\exp(1)$. Por lo tanto, imponiendo que el primer momento (la esperanza) sea igual al momento muestral, obtenemos

$$\bar{X} = 1 + \hat{\theta}_1, \quad \text{es decir} \quad \hat{\theta}_1 = \bar{X} - 1.$$

2) La verosimilitud de la muestra es:

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n e^{-(x_i-\theta)} \mathbb{1}_{[\theta, \infty)}(x_i) = e^{n\theta} e^{-\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{[\theta, \infty)}(x_i).$$

Queremos maximizar lo anterior en θ . El término $e^{n\theta}$ nos dice que θ debe tomarse lo más grande posible, pero de manera que las funciones indicatrices evaluadas en los x_i no se anulen. El valor de θ más grande que cumple esto es $\theta = \min(x_1, \dots, x_n)$. Por lo tanto, el estimador de máxima verosimilitud es

$$\hat{\theta}_2 = \min(X_1, \dots, X_n).$$

P3. Sean X_1, \dots, X_n los resultados de las duraciones de las 16 baterías probadas.

a) Trabajamos con el estadístico

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{s_{n-1}^2/n}},$$

el cual sabemos que se distribuye como una t_{n-1} , es decir, como una t_{15} . Imponemos que T esté en un intervalo simétrico con probabilidad $1 - \alpha$ con $\alpha = 0,05$:

$$1 - \alpha = P(T \in [-c, c]) = 1 - 2P(T > c), \quad \text{es decir} \quad P(T > c) = \alpha/2 = 0,025.$$

Mirando la tabla de la distribución t -student, obtenemos $c = 2,131$. Despejando μ en la inclusión $T \in [-c, c]$, se tiene que

$$\mu \in \left[\bar{X} - c\sqrt{s_{n-1}^2/n}, \bar{X} + c\sqrt{s_{n-1}^2/n} \right] = \left[7 - 2,131\frac{\sqrt{0,9}}{4}, 7 + 2,131\frac{\sqrt{0,9}}{4} \right].$$

b) Trabajamos con el estadístico

$$S = (n-1)\frac{s_{n-1}^2}{\sigma^2},$$

el cual sabemos que se distribuye como una χ_{n-1}^2 , es decir, como una χ_{15}^2 . Imponemos entonces:

$$1 - \alpha = P(S \in [c, d]),$$

donde c es tal que $P(S > c) = 1 - \alpha/2$ y d es tal que $P(S > d) = \alpha/2$, con $\alpha/2 = 0,025$. Mirando la tabla de la distribución chi-cuadrado obtenemos $c = 6,26$ y $d = 27,5$. Despejando σ^2 en la inclusión $S \in [c, d]$, obtenemos:

$$\sigma^2 \in \left[\frac{(n-1)s_{n-1}^2}{d}, \frac{(n-1)s_{n-1}^2}{c} \right] = \left[\frac{15 \cdot 0,9}{27,5}, \frac{15 \cdot 0,9}{6,26} \right].$$

c) Trabajamos con el estadístico

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

el cual sabemos que se distribuye como una normal estándar. Imponemos:

$$1 - \alpha = P(Z \in [-c, c]) = 1 - 2P(Z > c), \quad \text{es decir} \quad P(Z > c) = \alpha/2 = 0,025.$$

Mirando la tabla de una normal estándar obtenemos $c = 1,96$. Por lo tanto, despejando μ en la inclusión $Z \in [-c, c]$, se obtiene

$$\mu \in \left[\bar{X} - c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + c\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = \left[7 - \frac{1,96}{4}, 7 + \frac{1,96}{4} \right].$$

d) El nivel de confianza es el mismo si mantenemos el mismo $c = 1,96$. Por otro lado, el largo del intervalo anterior es la diferencia de los extremos, es decir

$$2\frac{1,96}{4} = \frac{1,96}{2}.$$

Queremos encontrar un n^* tal que este intervalo se reduzca un 20%, para lo cual imponemos entonces que el largo del nuevo intervalo sea un 80% veces la cantidad anterior, es decir:

$$2\frac{1,96}{\sqrt{n^*}} = 0,8\frac{1,96}{2}, \quad \text{es decir} \quad \sqrt{n^*} = 5.$$

Por lo tanto $n^* = 25$, lo que significa que deben probarse 9 baterías adicionales para reducir el largo del intervalo un 20%.