

EXAMEN

6 de julio de 2012

Tiempo: 3 horas

- P1.** (a) En el ascensor de un edificio de n pisos hay m personas. Suponiendo que cada persona se baja en cualquier piso con igual probabilidad e independiente de las otras personas, calcule:
- 1) (1,0 pto.) La probabilidad de que m_1 personas bajen en el primer piso, m_2 bajen en el segundo, y así sucesivamente hasta m_n . Suponga $\sum_{i=1}^n m_i = m$.
 - 2) (1,0 pto.) La probabilidad de que todas las personas bajen en pisos diferentes. Suponga $m \leq n$.
- (b) Para ir de la Facultad a su casa, usted tiene dos opciones: puede esperar el bus de la línea A en el paradero correspondiente, o bien el bus de la línea B en otro paradero. Los tiempos T_A y T_B (en minutos) que tarda en pasar el siguiente bus de la línea respectiva son variables aleatorias exponenciales independientes de parámetros λ_A y λ_B , respectivamente. Suponga que usted escoge el paradero al azar, independiente de T_A y T_B . Sea T su tiempo de espera para abordar al bus.
- 1) (1,5 pto.) Muestre que $\mathbb{P}(T_A < T_B) = \lambda_A / (\lambda_A + \lambda_B)$.
 - 2) (1,5 pto.) Si a los t minutos usted sigue en el paradero, ¿cuál es la probabilidad de que esté esperando el bus de la línea A ? Suponiendo $\lambda_B > \lambda_A$, ¿qué ocurre cuando t es grande?
 - 3) (1,0 pto.) Usted cambia su estrategia: se ubica a medio camino entre los paraderos, y apenas visualiza el primer bus que viene llegando, usted corre al paradero correspondiente y aborda el bus. ¿Cuál es la distribución de T con esta estrategia?
- P2.** (a) (2,0 ptos.) Considere una m.a.s. X_1, \dots, X_n proveniente de una variable $\text{bin}(m, p)$, con m conocido y p desconocido. Muestre que los estimadores de p de máxima verosimilitud y de los momentos coinciden con $\hat{p} = \bar{X}/m$. Muestre que es insesgado y que converge casi seguramente a p cuando $n \rightarrow \infty$.

En un centro comercial hay 3 tiendas de la misma cadena, y se desea investigar la forma en que los clientes deciden entrar o no entrar en cada una de ellas. Se propone el siguiente modelo: cada cliente decide entrar a una tienda con probabilidad p (desconocida), y decide no entrar con probabilidad $1 - p$, independiente de las otras dos tiendas y del resto de los clientes. Se le hace un seguimiento a $n = 64$ clientes, cuyos resultados se resumen en la siguiente tabla:

| Cantidad de tiendas visitadas | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-------------------------------|---|----|----|----|
| Cantidad de clientes | 6 | 30 | 18 | 10 |

- (b) (2,0 ptos.) Muestre que el valor del estimador de máxima verosimilitud de p que se obtiene de acuerdo a los datos es $\hat{p} = 1/2$. Plantee las hipótesis del test de bondad de ajuste para el modelo propuesto, especificando el valor de p_i bajo H_0 , para cada $i = 0, 1, 2, 3$.
 - (c) (2,0 ptos.) Realice el test y concluya para $\alpha = 10\%$.
- P3.** (a) (2,0 ptos.) En una fábrica de motores, se desea comprar una gran cantidad de una cierta pieza específica. Se dispone de dos proveedores de piezas, A y B . Se adquieren 10 piezas del proveedor A y se mide el grosor de cada una, obteniendo que el valor del estimador insesgado de la varianza es 0,0003. Además, se adquieren 20 piezas del proveedor B y el estimador insesgado de la varianza dio 0,0001. Las muestras se asumen normales e independientes. Con $\alpha = 5\%$, ¿hay suficiente evidencia para afirmar que el proveedor B produce piezas con varianza estrictamente menor?
- (b) Existen 4 tamaños predeterminados para un cierto producto. Se desea investigar la posible relación lineal entre la duración del producto y su tamaño, para lo cual se toman muestras de 2 productos por cada tamaño, y se registra su duración y se ajusta la recta de mínimos cuadrados sobre los datos obtenidos.
- 1) (2,0 ptos.) Se realiza el test para decidir si la constante multiplicativa del modelo es distinta de 0. El valor del estadístico correspondiente, bajo la hipótesis nula, es 1,95. ¿Cuál es el p -valor del test? ¿Cuál es la conclusión si se trabaja con $\alpha = 5\%$?
 - 2) (2,0 ptos.) Sabiendo además que el valor estimado de la constante multiplicativa dio 3,9, calcule un intervalo de confianza de dicha constante al nivel 95%.