Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Primavera 2012

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Pauta examen

P1. (a) Cada vez que pasa un bus hay 3 posibilidades (línea A, B o C). Como pasan k buses, en total son $3 \times \cdots \times 3 = 3^k$ maneras en que pueden pasar los buses en el primer caso. En el segundo caso, hay que escoger las k_A posiciones en que pasan los buses de la línea A, ídem para k_B y k_C. Sabemos que la cantidad de formas en que esto puede hacerse es

$$\binom{k}{k_A, k_B, k_C}.$$

(b) Claramente, $G \sim \text{geom}(p)$, pues se repite el experimento de que pase un bus de manera independiente hasta que pasa el primer bus de la lína A, lo cual tiene probabilidad p. Calculemos la distribución de T. Dado $i = 1, 2, \ldots$, llamemos T_i al tiempo que transcurre entre que pasa el bus $i-1$ y el i-ésimo. Notemos que como T es el tiempo total de espera hasta que pasa el primer bus de la línea A, T corresponde a la suma de los tiempos T_i para todo $i \leq G$, es decir

$$T = \sum_{i=1}^{G} T_i.$$

Notemos también que en el evento $\{G = j\}$, se tiene que $T = T_1 + \cdots + T_j$, es decir, $T \sim \text{gamma}(j, \lambda)$, pues los T_i son exponenciales independientes de parámetro λ. Con esto y siguiendo la indicación, tenemos para $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(T > t \mid G = j)\mathbb{P}(G = j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_t^{\infty} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{j-1}}{\Gamma(j)} dx (1-p)^{j-1} p \\
&= p\lambda \int_t^{\infty} e^{-\lambda x} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda x)^{j-1}}{(j-1)!}(1-p)^{j-1} dx \\
&= p\lambda \int_t^{\infty} e^{-\lambda x} e^{\lambda x(1-p)} dx \\
&= \int_t^{\infty} p\lambda e^{-p\lambda x} dx \\
&= e^{-p\lambda t}.
\end{aligned}$$

Esto prueba $T \sim \exp(p\lambda)$.

(c) Queremos calcular la probabilidad que $G = 1$ dado que $T > t$. Utilizando la regla de Bayes y lo hecho en la parte anterior, tenemos:

$$\mathbb{P}(G = 1 \mid T > t) = \frac{\mathbb{P}(T > t \mid G = 1)\mathbb{P}(G = 1)}{\mathbb{P}(T > t)} = \frac{e^{-\lambda t} p}{e^{-p\lambda t}} = e^{-(1-p)\lambda t} p,$$

donde hemos utilizado que en el evento $\{G = 1\}$ se cumple que $T = T_1 \sim \exp(\lambda)$.

P2. (a) Para calcular C utilizamos el hecho que $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$. Haciendo el cambio de variable $y = (x/\lambda)^k$ (luego $x^{k-1}dx = \lambda^k dy/k$), obtenemos:

$$1 = C \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k} dx = C \int_0^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-y}}{k} dy = \frac{C\lambda^k}{k}.$$

Es decir, $C = k/\lambda^k$.

(b) Calculemos $\mathbb{E}(X)$. Haciendo el mismo cambio de variable $y = (x/\lambda)^k$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \frac{k}{\lambda^k}\int_0^\infty x x^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}\,dx \\
&= \int_0^\infty \lambda y^{1/k} e^{-y} dy \\
&= \lambda \int_0^\infty y^{(1+1/k)-1} e^{-y} dy \\
&= \lambda\Gamma(1+1/k).
\end{aligned}$$

(c) Sea $Y = X^k$, y calculemos $\mathbb{P}(Y > y)$ para $t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y > t) &= \mathbb{P}(X > t^{1/k}) \\
&= \frac{k}{\lambda^k}\int_{t^{1/k}}^\infty x^{k-1} e^{-(x/\lambda)^k}\,dx \\
&= \int_{t/\lambda^k}^\infty e^{-y} dy \\
&= e^{-t/\lambda^k},
\end{aligned}$$

donde nuevamente hemos utilizado el cambio de variable $y = (x/\lambda)^k$. Esto prueba que $Y \sim \exp(1/\lambda^k)$.

(d) Para $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, la función de verosimilitud está dada por

$$L = L(x_1, \ldots, x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^n \frac{k}{\lambda^k} x_i^{k-1} e^{-(x_i/\lambda)^k} = \frac{k^n}{\lambda^{nk}} e^{-\frac{1}{\lambda^k}\sum_{i=1}^n x_i^k} \left[\prod_{i=1}^n x_i\right]^{k-1},$$

luego

$$\log L = n\log k - nk\log\lambda - \frac{1}{\lambda^k}\sum_{i=1}^n x_i^k + (k-1)\sum_{i=1}^n \log x_i.$$

Para maximizar lo anterior con respecto a λ, derivamos con respecto a λ e igualamos a 0:

$$0 = \frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = -\frac{nk}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}}\sum_{i=1}^n x_i^k.$$

Despejando λ y reemplazando los $x_1, \ldots, x_n$ por la muestra $X_1, \ldots, X_n$, obtenemos lo deseado:

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k\right)^{1/k}.$$

(e) Por lo realizado previamente, sabemos que las variables $Y_i = X_i^k$ son exponenciales de parámetro $1/\lambda^k$, y son independientes pues los X_i lo son. Luego, por la ley fuerte de los grandes números, se tiene que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i = \overline{Y} \to \mathbb{E}(Y_1),$$

casi seguramente cuando $n \to \infty$. Pero sabemos que la esperanza de una variable exponencial es el recíproco del parámetro, luego $\mathbb{E}(Y_1) = \lambda^k$. Por lo tanto, se obtiene la convergencia buscada:

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^k\right)^{1/k} \to (\lambda^k)^{1/k} = \lambda.$$

P3. (a) Las probabilidades estimadas en base a la muestra son $\hat{p}_j = n_j/n$, donde n_1, n_2 y n_3 son la cantidad de clientes que prefieren el envase A, B y C, respectivamente. Las probabilidades de la hipótesis nula son equiprobables entre las $k = 3$ posibilidades, es decir, $p_j^0 = 1/k = 1/3$, para $j = 1, 2, 3$. Con esto, calculemos el valor observado en la muestra del estadístico Δ:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\text{obs}} &= n \sum_{j=1}^{k} \frac{(\hat{p}_j - p_j^0)^2}{p_j^0} \\
&= n \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(\frac{n_j}{n} - \frac{n}{nk}\right)^2}{\frac{1}{k}} \\
&= \frac{k}{n} \sum_{j=1}^{k} (n_j - n/k)^2 \\
&= \frac{1}{60}[(50-60)^2 + (73-60)^2 + (57-60)^2],
\end{aligned}$$

es decir, $\Delta_{\text{obs}} = [100 + 169 + 9]/60 = 278/60 \approx 4{,}633$. El p-valor corresponde a la probabilidad, bajo H_0, de obtener algo al menos tan extremo como lo observado en la muestra. Sabemos que bajo H_0, el estadístico Δ tiene distribución aproximada de una χ^2_{k-1} (con $k - 1 = 2$), con lo cual obtenemos:

$$p\text{-valor} = \mathbb{P}(\Delta \geq \Delta_{\text{obs}} \mid H_0) \approx \mathbb{P}(\chi^2_2 \geq 4{,}633) \approx 0{,}1,$$

donde en el último paso hemos utilizado la tabla de la distribución chi-cuadrado. Notemos que $\alpha = 5\,\% < 10\,\% = p$-valor, por lo tanto no corresponde rechazar la hipótesis nula. Es decir, no hay suficiente evidencia para afirmar que los clientes poseen preferencia por alguno de los envases.

(b) De acuerdo a los datos, es directo que $\bar{x} = 0$, $\overline{Y} = 1$. Además:

$$\begin{aligned}
S_{xx} &= \sum (x_i - \bar{x})^2 = 2^1 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 10 \\
S_{xy} &= \sum (x_i - \bar{x}) Y_i = (-2)\cdot 0 + (-1)\cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7.
\end{aligned}$$

Con esto, tenemos que $\hat{\beta}_1 = S_{xy}/S_{xx} = 7/10$, y $\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 1$. Para obtener el intervalo de confianza, necesitaremos además:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \sum (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i - Y_i)^2 \\
&= \left(1 - \frac{14}{10} - 0\right)^2 + \left(1 - \frac{7}{10} - 0\right)^2 + \left(1 + \frac{0}{10} - 1\right)^2 + \left(1 + \frac{7}{10} - 1\right)^2 + \left(1 + \frac{14}{10} - 3\right)^2 \\
&= \frac{1}{100}[(-4)^2 + 3^2 + 0^2 + 7^2 + (-6)^2]
\end{aligned}$$

es decir, $S^2 = [16 + 9 + 0 + 49 + 36]/100 = 110/100 = 1{,}1$. Sabemos que $T_1 \sim t_{n-2}$. Para calcular el intervalo de confianza, imponemos:

$$95\,\% = \mathbb{P}(T_1 \in [-c, c]) = 1 - 2\mathbb{P}(t_3 > c),$$

es decir, $\mathbb{P}(t_3 > c) = 2{,}5\,\%$. De una tabla, obtenemos $c = 3{,}182$. Despejando β_1 en la desigualdad $-c \leq T_1 \leq c$, obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned}
\hat{\beta}_1 - \left[\frac{S^2}{(n-2)S_{xx}}\right]^{1/2} c \leq \beta_1 \leq \hat{\beta}_1 + \left[\frac{S^2}{(n-2)S_{xx}}\right]^{1/2} c \\
\frac{7}{10} - \left[\frac{1{,}1}{3 \cdot 10}\right]^{1/2} \cdot 3{,}182 \leq \beta_1 \leq \frac{7}{10} + \left[\frac{1{,}1}{3 \cdot 10}\right]^{1/2} \cdot 3{,}182.
\end{aligned}$$