Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-5 Probabilidades y Estadística
Otoño 2013

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Examen

30 de julio de 2013
Tiempo: 3 horas

P1. (a) Usted posee 30 pares de calcetines sucios, y escoge 40 calcetines al azar para echar a lavar. Sea X la cantidad de calcetines limpios que quedan sin su pareja.

1) (1,0 pto.) Argumente por qué $\mathbb{P}(X = n) = 0$ cuando n es impar.
2) (2,0 ptos.) Calcule la distribución de X.

(b) Todos las mañanas usted llega al paradero a las 8:20 para esperar el autobús que lo deja en el lugar donde usted realiza su práctica laboral. Hay dos líneas de autobuses que a usted le sirven: la A y la B, y usted subirá al primero que pase. Los tiempos que tardan los autobuses en pasar son variables exponenciales independientes de parámetros $\lambda_A = 1/10$ y $\lambda_B = 1/20$. El viaje en autobús toma exactamente 30 minutos para ambas líneas, y la hora de entrada de la práctica es a las 9:00.

1) (1,5 ptos.) Sea T el tiempo que usted está en el paradero. Muestre que T es una variable exponencial de parámetro $3/20$.
2) (1,5 ptos.) La hora de llegada del jefe es una v.a. uniforme en el intervalo 8:50 y 9:10, independiente de T. Calcule la probabilidad de que el jefe lo sorprenda llegando tarde.

P2. Sea X una variable aleatoria con distribución de Laplace de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $b > 0$, es decir, su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) (1,5 ptos.) Muestre que la función generadora de momentos de X es $M_X(t) = e^{\mu t}/(1 - b^2 t^2)$ para $|t| < 1/b$.

(b) (1,5 ptos.) Calcule la esperanza y varianza de X.

(c) (1,5 ptos.) Suponiendo $\mu = 0$, calcule la densidad de $|X|$. ¿Qué variable conocida es $|X|$?

(d) (1,5 ptos.) Suponga $\mu = 0$, y sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. proveniente de la distribución de X. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de b, y pruebe que éste converge casi seguramente a b cuando $n \to \infty$.

P3. (a) Se sabe que la duración (en días) de una ampolleta de la marca A es una variable aleatoria exponencial de parámetro $\lambda_A = 0{,}01$, mientras que una ampolleta de la marca B tiene $\lambda_B = 0{,}0025$. Usted escoge al azar una ampolleta de una de estas marcas, y después de 200 días de uso ésta sigue funcionando.

1) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de que la ampolleta sea de la marca B?
2) (1,5 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de que la ampolleta funcione por otros 200 días?

(b) Se dispone de una m.a.s. $X_1, \ldots, X_n$ proveniente de una distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$ desconocido. Sean $\lambda_1 > \lambda_0 > 0$ valores dados. Se plantean las hipótesis "$H_0 : \lambda = \lambda_0$" y "$H_1 : \lambda = \lambda_1$".

1) (1,5 ptos.) Muestre que el test más potente tiene región de rechazo de la forma $R = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \leq \text{CTE}\}$. ¿Es uniformemete más potente entre todos los tests tales que $\lambda_1 > \lambda_0$?
2) (1,5 ptos.) Suponga que $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = 2$ y $n = 25$, y que el promedio observado en la muestra es 0,6. Aproximando con un teorema adecuado, calcule el p-valor del test. Para $\alpha = 5\,\%$, ¿debe o no rechazarse H_0?