Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-5 Probabilidades y Estadística
Otoño 2013

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Control 2

13 de mayo de 2013
Tiempo: 3 horas

P1. (a) (2,0 ptos.) Sean $X \sim \text{unif}(0,1)$, $Y \sim \exp(1)$ variables independientes. Sean $U = X + Y$, $V = \frac{X}{Y}$. Muestre que

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{ue^{-u/(v+1)}}{(v+1)^2} & \text{si } 0 < u \leq 1 + 1/v \text{ y } 0 < v \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(b) En un banco llegan clientes siguiendo un proceso de Poisson con tasa $\mu = 3$ clientes por minuto. Además, cada una de las 4 cajas disponibles atiende clientes siguiendo un proceso de Poisson (independiente a la llegada de los clientes al banco y de las otras cajas), de manera que el valor esperado del tiempo que un cliente tarda en una caja es de 2 minutos.

1) (1,0 pto.) ¿Cuál es la probabilidad de que en 2 minutos lleguen exactamente 4 clientes?
2) (1,0 pto.) ¿Cuál es la tasa de atención conjunta de las cajas?
3) (2,0 ptos.) Suponga que surge una falla en el sistema computacional del banco, por lo cual las cajas dejan de atender clientes. El tiempo que tarda el sistema en volver a funcionar es una variable exponencial de parámetro $\lambda = 0{,}2$. ¿Cuál es el valor esperado de la cantidad de clientes que llegan al banco durante la falla del sistema?

P2. Sea X variable aleatoria de *Fréchet* de parámetros $\alpha > 0$ y $s > 0$, anotado $X \sim \text{Fréchet}(\alpha, s)$. Es decir, su densidad es

$$f_X(x) = \frac{\alpha}{s}\left(\frac{x}{s}\right)^{-(\alpha+1)} e^{-(x/s)^{-\alpha}} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x).$$

(a) (1,5 ptos.) Muestre que $F_X(x) = e^{-(x/s)^{-\alpha}} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$. Muestre que la *mediana* de X es $m = s\log(2)^{-1/\alpha}$, es decir, m satisface $\mathbb{P}(X \geq m) = \mathbb{P}(X \leq m) = 1/2$.

(b) (1,5 ptos.) Sea $k < \alpha$ un número natural. Muestre que el k-ésimo momento de X es igual a $s^k\Gamma(1 - k/\alpha)$. Suponiendo $\alpha > 2$, obtenga la esperanza y varianza de X. Recuerde que $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty z^{\theta-1}e^{-\theta}dz$, $\forall \theta > 0$.

(c) (1,5 ptos.) Sea $U \sim \text{unif}(0,1)$. Muestre que $Y = s(-\log(U))^{-1/\alpha} \sim \text{Fréchet}(\alpha, s)$.

(d) (1,5 ptos.) Pruebe que la distribución de Fréchet es *máx-estable*. Es decir: dadas U y V variables independientes tales que $U \sim \text{Fréchet}(\alpha, s)$ y $V \sim \text{Fréchet}(\alpha, t)$, pruebe que $Z = \text{máx}(U, V)$ también posee distribución de Fréchet. ¿De qué parámetros?

P3. (a) (2,0 ptos.) Suponga que n personas van a una fiesta, y al llegar cada una deja su chaqueta en el sillón. Debido al ajetreo, durante la fiesta las chaquetas se revuelven (permutan) al azar. Al retirarse, las personas no distinguen cuál es su chaqueta, así que se llevan la primera que encuentran. Calcule la cantidad esperada de personas que se llevan su propia chaqueta. *Indicación:* defina variables indicatrices adecuadas y utilice la linealidad de la esperanza.

(b) (2,0 ptos.) Muestre que la distribución gamma es *estable bajo sumas*. Es decir: dadas X e Y variables independientes tales que $X \sim \text{gamma}(\theta, \lambda)$ e $Y \sim \text{gamma}(\sigma, \lambda)$, pruebe que $Z = X + Y$ también es una variable gamma. ¿De qué parámetros? En el caso en que θ y σ son números naturales, argumente por qué este resultado era esperable.

(c) (2,0 ptos.) Sean X, Y variables aleatorias con densidad conjunta $f_{X,Y}(x,y) = 2(x+y)$ cuando $0 < x < 1$, $0 < y < x$, y $f_{X,Y}(x,y) = 0$ en otro caso. Calcule las densidades marginales de X e Y. ¿Son independientes? Explique.