Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística, Primavera 2012

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Control 2

8 de octubre de 2012
Tiempo: 3 horas

P1. (a) (3,0 ptos.) Una persona dispara con arco y flecha a un blanco. Si la flecha llega a menos de 5cm del centro, se asignan 10 puntos; si está a más de 5cm y a menos de 15cm, se le asignan 5 puntos; y si está a más de 15cm y menos de 25cm, se le asignan 3 puntos. En otro caso, no se asignan puntos. Calcule la cantidad esperada de puntos que obtiene la persona, si se sabe que la distancia de la flecha al centro del blanco se distribuye uniformemente entre 0cm y 50cm.

(b) Sean X e Y variables independientes con distribución normal estándar. Sean $U = X$ y $V = X/Y$.

1) (1,5 ptos.) Muestre que

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{|u|e^{-u^2(1+1/v^2)/2}}{2\pi v^2}.$$

2) (1,5 ptos.) Muestre que $V = X/Y$ tiene distribución de Cauchy, es decir, su densidad es

$$f_V(v) = \frac{1}{\pi(1+v^2)}.$$

P2. Decimos que X es una variable aleatoria *Gumbel* de parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\beta > 0$, anotado $X \sim \text{Gumbel}(\mu, \beta)$, si se tiene

$$F_X(x) = e^{-e^{-(x-\mu)/\beta}},\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(a) (1,5 ptos.) Muestre que $M_X(t) = e^{\mu t}\Gamma(1-\beta t)$, donde la función Γ está dada por

$$\Gamma(\theta) = \int_0^\infty e^{-z} z^{\theta-1} dz,\ \forall \theta > 0.$$

(b) (1,5 ptos.) Muestre que $\mathbb{E}(X) = \mu - \beta\Gamma'(1)$ y $\text{var}(X) = \beta^2[\Gamma''(1) - \Gamma'(1)^2]$.

(c) (1,5 ptos.) Dados $\nu \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 0$, sea $Y = \alpha X + \nu$. Mueste que $Y \sim \text{Gumbel}(\alpha\mu + \nu, \alpha\beta)$.

(d) (1,5 ptos.) Sea $Y = e^{-(X-\mu)/\beta}$. Calcule f_Y. ¿Qué variable aleatoria conocida es Y?

P3. Usted trabaja atendiendo un almacén. Los clientes llegan siguiendo un proceso de Poisson con tasa λ de 0,5 clientes por minuto.

(a) (2,0 ptos.) ¿Cuál es la probabilidad de que en los próximos 4 minutos lleguen a lo más 2 clientes?

(b) (2,0 ptos.) Sea T el instante en que llega el primer cliente, y S el tiempo que transcurre desde T hasta que llega el siguiente cliente. Para $0 \le t \le s$, muestre que $\mathbb{P}(T \le t, s < T + S) = \lambda t e^{-\lambda s}$. *Indicación:* usando una propiedad conocida, condicione en los posibles resultados de T; argumente por qué T y S son independientes y utilice este hecho.

Suponga que en el instante 0 usted se ausenta del almacén y vuelve después de s minutos. Al volver observa que ha llegado exactamente 1 cliente. Queremos probar que, dado que llegó un solo cliente en $[0, s]$, la variable T se distribuye uniformemente en dicho intervalo.

(c) (2,0 ptos.) Argumente que el evento en que llega un solo cliente en $[0, s]$ corresponde al evento $\{T \le s < T + S\}$. Para $0 \le t \le s$, calcule $\mathbb{P}(T \le t \mid \text{llega un solo cliente en } [0, s])$ y concluya. *Indicación:* utilice la parte anterior.