Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-5 Probabilidades y Estadística
Otoño 2013

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

CONTROL 3

17 de junio de 2013
Tiempo: 3 horas

P1. (a) (3,0 ptos.) En una fiesta de año nuevo a la que usted asiste, se lanza al aire una gran cantidad de diminutos papeles blancos y rojos. Los papeles blancos provienen de un contenedor esférico, y los papeles rojos de una caja cúbica, de manera que el diámetro del contenedor esférico es igual a la arista de la caja (ambos poseen igual cantidad de papeles por cm^3). Al llegar a su casa usted se percata que adheridos a su ropa hay b papeles blancos y r papeles rojos. Argumente por qué $6b/r$ es una buena aproximación de π; explicite sus supuestos. *Indicación:* el volumen de una esfera de radio R es $\frac{4}{3}\pi R^3$.

(b) (3,0 ptos.) Una empresa fabrica ciertas piezas cuyo grosor debería ser de 7cm. Debido a pruebas realizadas sobre la producción, existe la sospecha de que la máquina que produce las piezas esté defectuosa, haciendo que estas tengan un menor grosor del deseado. Suponga que se obtiene una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_{25}$ de los grosores de estas piezas, tal que $\sum X_i = 172{,}508$ y su varianza muestral insesgada es $s^2 = 0{,}04$. Asuma además que el grosor de una pieza es una v.a. normal. Realice un test de hipótesis y calcule el p-valor. Indique su conclusión para un nivel $\alpha = 5\,\%$.

P2. (a) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple proveniente de una distribución con densidad $f(x) = (\theta + 1)x^\theta \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, donde $\theta > -1$ es un parámetro desconocido.

1) (1,5 ptos.) Obtenga estimadores de θ con el método de máxima verosimilitud y de los momentos.
2) (1,5 ptos.) Muestre que ambos estimadores convergen casi seguramente a θ cuando $n \to \infty$.

(b) Los puntajes obtenidos por $n = 25$ alumnos en una prueba se modelan como variables i.i.d. $X_1, \ldots, X_n$, cada una con ley $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ con ambos parámetros desconocidos. Los resultados obtenidos son tales que $\bar{X} = 65{,}0$ y $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = 2400{,}0$.

1) (1,0 pto.) Encuentre un intervalo de confianza para μ al nivel $95\,\%$.
2) (1,0 pto.) Encuentre un intervalo de confianza para σ^2 al nivel $95\,\%$.
3) (1,0 pto.) Calcule el valor esperado del largo del intervalo obtenido para σ^2.

P3. Un panel solar está conformado por n celdas fotovoltaicas estándar. La energía total que almacena el panel durante 1 hora es $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$, donde $X_1, \ldots, X_n$ representan las energías capturadas por cada celda, las cuales modelamos como variables i.i.d. positivas con media $\mu = 8$ [Wh]. Se desea obtener la cantidad mínima de celdas n^* tal que el panel almacene $E = 112$ [Wh] o más, con probabilidad de al menos $1 - \alpha$, con $\alpha = 2{,}28\,\%$.

(a) (2,0 ptos.) Sin aproximar con el TCL, encuentre una cota para la probabilidad de que el panel almacene la energía deseada. Obtenga una condición *necesaria* para el valor de n^*.

(b) (2,0 ptos.) Suponga de aquí en adelante que $\sigma^2 = 4$ es la varianza de cada X_i. Utilizando el TCL, encuentre un valor aproximado para n^*.

(c) (2,0 ptos.) Sale al mercado un nuevo tipo de celda que en 1 hora captura $\nu = 14$ [Wh] en esperanza, con varianza $\tau^2 = 16$. Usted propone diseñar un nuevo panel compuesto por m de estas celdas, cuyas energías producidas en 1 hora modelamos como variables i.i.d. $Y_1, \ldots, Y_m$, independientes de los X_i. Utilizando el TCL, calcule el mínimo m^* tal que, con probabilidad $1 - \alpha$, la energía total capturada $S = \sum_{i=1}^{m^*} Y_i$ sea al menos un $50\,\%$ mayor que la producida por un panel con la misma cantidad de celdas estándar.