Roberto Cortez
Ignacio López
Dafne Pincheira

Examen

24 de noviembre de 2014
Tiempo: 3 horas

P1. El sistema de generación de energía eléctrica del Metro tiene 5 transformadores distinguibles. Cada uno puede estar en 2 estados: operativo o defectuoso. La red de Metro se mantiene funcionando si y sólo si al menos 2 transformadores están operativos.

a) (1,5 ptos.) ¿Cuántas configuraciones de los transformadores mantienen al Metro funcionando?

El tiempo que transcurre desde que se realiza la mantención de un transformador hasta que éste falla es una variable exponencial de parámetro 1 (en unidades de fallas/año), independiente de los otros transformadores. En el instante $T_0 = 0$ se realiza una única mantención a los 5 transformadores, y definimos $T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5$ como los instantes sucesivos en que éstos van fallando.

b) (1,5 ptos.) Demuestre que el mínimo de n variables $\exp(\lambda)$ independientes tiene distribución $\exp(n\lambda)$. *Indicación:* $\min(x_1, \ldots, x_n) > a$ si y sólo si $x_i > a$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

c) (1,5 ptos.) Sea $S_i = T_i - T_{i-1}$ el tiempo que transcurre desde que ocurre la falla $i-1$ hasta la i-ésima. Argumente en palabras por qué cada vez que un transformador falla, los transformadores que quedan operativos se comportan como nuevas variables exponenciales independientes del mismo parámetro. Concluya que $S_i \sim \exp(6 - i)$.

d) (1,5 ptos.) Calcule el valor esperado y la varianza del instante en que el Metro deja de funcionar. *Indicación:* observe que $T_i = \sum_{j=1}^{i} S_j$, y use sin demostrar el hecho que los S_i son independientes.

P2. Dadas las constantes $\beta > 0$ conocida y $r > 0$ es desconocida, sea X variable aleatoria con densidad

$$f_X(x) = \frac{\beta}{r}\left(\frac{x}{r}\right)^{-(\beta+1)} e^{-(x/r)^{-\beta}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x).$$

a) (1,2 ptos.) Muestre que $F_X(x) = e^{-(x/r)^{-\beta}} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$. Muestre que $X^{-\beta} \sim \exp(r^\beta)$.

b) (1,2 ptos.) En lo que sigue, sea $X_1, \ldots, X_n$ una m.a.s. proveniente de la distribución de X. Muestre que el estimador de máxima verosimilitud de r es $\hat{r} = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{-\beta})^{-1/\beta}$.

c) (1,2 ptos.) Muestre que $\hat{r} \to r$ casi seguramente cuando $n \to \infty$. *Indicación:* defina $Y_i := X_i^{-\beta}$ y observe que $\hat{r}^{-\beta} = \overline{Y}$; luego utilice la parte (a) en conjunto con un teorema adecuado.

d) (1,2 ptos.) Muestre que el estadístico $Z := (\hat{r}^{-\beta} - r^{-\beta})/(r^{-\beta}/\sqrt{n})$ posee distribución aproximada $\mathcal{N}(0,1)$ cuando n es grande. *Indicación:* recuerde que si $Y \sim \exp(\lambda)$ entonces $\sigma^2 := \mathrm{var}(Y) = 1/\lambda^2$.

e) (1,2 ptos.) Utilice el estadístico Z para obtener un intervalo de confianza genérico para r al nivel $1 - \alpha$.

P3. *a)* (3,0 ptos.) Un mismo producto se vende en 3 envases distintos llamados A, B y C. Se desea verificar si los clientes tienen preferencia por alguno de los envases, por lo cual se toma una muestra de clientes, cuyos resultados se resumen en la tabla. Calcule el p-valor (o una aproximación) del test que verifica si existe alguna preferencia, y entregue la conclusión para $\alpha = 5\,\%$.

Envase	A	B	C
Cantidad clientes	50	73	87

b) (2,0 ptos.) Se dispone de una variable aleatoria Y, la cual se pretende explicar mediante una combinación lineal de potencias de una variable X, de la forma

$$Y \approx \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \ldots \beta_k X^k.$$

Dada una muestra $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, explicite el vector $\mathbb{Y}$ de variables dependientes, el vector β de coeficientes de la regresión, y la matriz $\mathbb{X}$ con los datos de la variable independiente.

c) (1,0 pto.) Para ajustar el modelo lineal $Y \approx a + bX$, se toma una muestra $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, obteniendo $\overline{x} = 3{,}0$, $\overline{y} = 2{,}0$, $\frac{1}{n}\sum x_i^2 = 10{,}2$, $\frac{1}{n}\sum x_i y_i = 2{,}4$. Calcule los estimadores $\hat{a}$ y $\hat{b}$ obtenidos con el criterio de mínimos cuadrados. Asumiendo que la aproximación del modelo es buena, ¿cuál es el valor aproximado del y asociado a $x = 2{,}0$?