Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-5 Probabilidades y Estadística
Otoño 2013

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

# Pauta examen

**P1.** (a) 1) Si $Y$ denota la cantidad de calcetines limpios con pareja, siempre se tiene $X+Y=40$. Luego, si $X$ fuese impar, $Y$ también lo sería, lo cual es imposible. Por lo tanto, $\mathbb{P}(X=n)=0$ para todo $n$ impar.

2) Calculemos $\mathbb{P}(X=n)$ para $n$ de la forma $n=2k$. Trabajaremos con el espacio equiprobable de todas las formas de extraer 40 calcetines del total de 60, el cual posee $\binom{60}{40}$ elementos. Las formas de extraer 40 calcetines de modo que se obtengan exactamente $2k$ calcetines sin pareja corresponden a

$$2^{2k}\binom{30}{20-k,2k,10-k}.$$

El coeficiente multinomial anterior equivale a la cantidad de formas de separar los 30 pares de calcetines en grupos de tamaño $20-k$, $2k$ y $10-k$, correspondientes respectivamente a: (I) pares de los cuales se extraerán ambos calcetines, (II) pares de los cuales se extraerá 1 solo calcetín, (III) pares de los cuales no se extraerá ninguno. Una vez escogidos dichos pares, la única elección restante es esoger un calcetín por cada par de tipo (II), lo cual puede hacerse de $2^{2k}$ formas.
Por lo tanto, obtenemos que la distribución de $X$ está dada por:

$$\mathbb{P}(X=n)=\begin{cases}\frac{4^k\binom{30}{20-k,2k,10-k}}{\binom{60}{40}} & \text{si } n=2k,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

(b) 1) Si $T_A$ y $T_B$ son los tiempos que tardan en pasar los buses de las líneas $A$ y $B$ respectivamente, es claro que $T=\min(T_A,T_B)$. Calculemos la distribución acumulada de $T$, utilizando el hecho que $T>x$ si y sólo si $T_A>x$ y $T_B>x$:

$$F_(T)(x)=\mathbb{P}(T\leq x)=1-\mathbb{P}(T>x)=1-\mathbb{P}(T_A>x)\mathbb{P}(T_B>x),$$

donde en el último paso hemos utilizado la independencia entre $T_A$ y $T_B$. Como $T_A$ es variable exponencial de parámetro $\lambda_A$, es directo que $\mathbb{P}(T_A>x)=e-\lambda_A x$, ídem para $T_B$. Luego:

$$F_T(x)=1-e^{-\lambda_A x}e^{-\lambda_B x}=1-e^{-(\lambda_A+\lambda_B)x},$$

y derivando obtenemos $f_T(x)=(\lambda_A+\lambda_B)e^{-(\lambda_A+\lambda_B)x}$, lo cual vale para $x\geq 0$, mientras que para $x\leq 0$ es claro que $f_T(x)=0$ (pues $T$ sólo toma valores positivos). Es decir, $T$ es una variable exponencial de parámetro $\lambda_A+\lambda_B=1/10+1/20=3/20$.

2) Fijemos las 8:50 como hora 0, con lo cual la hora $J$ en que llegua el jefe es una variable uniforme en el intervalo $[0,20]$, y la hora a la que usted llega es $T$. Deseamos calcular la probabilidad de que usted llegue tarde y que el jefe llegue antes que usted, es decir, $T>10$ y $J<T$. Condicionando en los posibles resultados de $J$ y utilizando la independencia entre $T$ y $J$, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T>10,J<T)&=\int_0^{20}\mathbb{P}(T>10,J<T\mid J=t)f_J(t)dt\\&=\int_0^{20}\mathbb{P}(T>10,t<T)\frac{dt}{20}.\end{aligned}$$

Para $t > 20$, la probabilidad dentro de la integral corresponde a $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$, mientras que si $t \leq 10$ dicha probabilidad es $\mathbb{P}(T > 10) = e^{-\lambda\times 10}$, donde $\lambda = 3/20$ es el parámetro de $T$. Con esto:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > 10, J > T) &= \int_0^{10} e^{-10\lambda}\frac{dt}{20} + \int_{10}^{20} e^{-\lambda t}\frac{dt}{20}\\ &= \frac{e^{-10\lambda}}{2} + \frac{e^{-10\lambda} - e^{-20\lambda}}{20\lambda}\\ &= \frac{e^{-3/2}}{2} + \frac{e^{-3/2} - e^{-3}}{3}.\end{aligned}$$

**P2.** (a) Calculemos:

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{2b}e^{-\frac{|x-\mu|}{b}}dx = \frac{e^{\mu t}}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ty}e^{-\frac{|y|}{b}}dy,$$

donde la última igualdad se obtiene haciendo el cambio de variable $y = x - \mu$. Separando la integral en los rangos en que $y$ es negativa y positiva, obtenemos:

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu t}}{2b}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{(t+\frac{1}{b})y}dy + \int_0^{\infty} e^{(t-\frac{1}{b})y}dy\right) = \frac{e^{\mu t}}{2b}\left(\left.\frac{e^{(t+\frac{1}{b})y}}{t+\frac{1}{b}}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{(t-\frac{1}{b})y}}{t-\frac{1}{b}}\right|_{0}^{\infty}\right).$$

Por lo tanto, la primera integral converge cuando $t > -1/b$, y la segunda converge cuando $t < 1/b$. Es decir, $M_X(t)$ está bien definida cuando $|t| < 1/b$. Para un tal $t$, se tiene entonces:

$$M_X(t) = \frac{e^{\mu t}}{2b}\left(\frac{1}{t+\frac{1}{b}} - \frac{1}{t-\frac{1}{b}}\right) = \frac{e^{\mu t}}{1-b^2t^2}.$$

(b) Derivando la f.g.m. y evaluando en 0:

$$M_X'(t) = \left(\frac{e^{\mu t}}{1-b^2t^2}\right)' = \frac{\mu e^{\mu t}(1-b^2t^2) + 2b^2te^{\mu t}}{(1-b^2t^2)^2} \Rightarrow \mathbb{E}(X) = M_X'(0) = \frac{\mu\cdot 1 - 0}{1} = \mu.$$

Derivamos nuevamente:

$$\begin{aligned}M_X''(t) &= \left(\frac{\mu e^{\mu t}(1-b^2t^2) + 2b^2te^{\mu t}}{(1-b^2t^2)^2}\right)'\\ &= \frac{1}{(1-b^2t^2)^4}[(\mu^2e^{\mu t}(1-bt^2) - 2b^2te^{\mu t} + 2b^2e^{\mu t} + 2bt\mu e^{\mu t})(1-b^2t^2)^2\\ &\quad + 4(1-b^2t^2)b^2t(\mu e^{\mu t}(1-b^2t^2) + 2b^2te^{\mu t})].\end{aligned}$$

Evaluando en 0 para obtener el segundo momento de $X$, se obtiene:

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = M_X''(0) - \mu^2 = 1\cdot[(\mu^2 - 0 + 2b^2 + 0)\cdot 1 + 0] - \mu^2 = \mu^2 + 2b^2 - \mu^2 = 2b^2.$$

(c) Sea $Y = |X|$. Calculemos su distribución acumulada en $y \geq 0$:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(|X| \leq y) = \mathbb{P}(-y \leq X \leq y) = \int_{-y}^{y}\frac{1}{2b}e^{\frac{-|x|}{b}}dx = 2\int_0^y \frac{1}{2b}e^{-\frac{x}{b}}dx,$$

donde la última igualdad se obtiene por la simetría del integrando. Derivando con respecto a $y$, y aplicando el teorema fundamental del Cálculo, se llega a que $f_Y(y) = (1/b)e^{-\frac{y}{b}}$. Sabiendo que $f_Y(y) = 0$ para $y < 0$ (pues $Y$ es no-negativa), obtenemos:

$$f_Y(y) = \frac{1}{b}e^{-\frac{y}{b}}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y).$$

Es decir, $Y = |X|$ tiene distribución exponencial de parámetro $1/b$.

(d) La función de verosimilitud es

$$L = L(x_1, \dots, x_n; b) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x_i|}{b}} = (2b)^{-n} e^{-\frac{1}{b}\sum |x_i|}.$$

Tomando logaritmo y derivando e igualando a 0 para maximizar con respecto a $b$, obtenemos:

$$0 = \frac{\partial \log L}{\partial b} = \frac{\partial \log}{\partial b}\left[-n \log 2 - n \log b - \frac{1}{b}\sum |x_i|\right] = -\frac{n}{b} + \frac{1}{b^2}\sum |x_i|.$$

Despejando $b$ y reemplazando la muestra de los $X_i$, tenemos que el estimador de $b$ de máxima verosimilitud es

$$\hat{b} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |X_i|.$$

O alternativamente: si llamamos $Y_i = |X_i|$, podemos anotar $\hat{b} = \bar{Y}$. Notemos que $Y_1, \dots, Y_n$ es una m.a.s. de la distribución de $Y = |X|$, la cual es una exponencial de parámetro $1/b$ por lo hecho en la parte P2.(c). Por la ley fuerte de los grandes números, tenemos que $\bar{Y} = \hat{b}$ converge casi seguramente a $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\exp(1/b)) = b$ cuando $n \to \infty$, como deseábamos probar.

**P3.** (a) 1) Llamemos $M$ a la marca de la ampolleta, y $T$ a su duración. Queremos calcular la probabilidad de que la marca sea $B$, dado que duró más de 200 días. Por regla de Bayes, tenemos:

$$\mathbb{P}(M = B \mid T > 200) = \frac{\mathbb{P}(T > 200 \mid M = B)\mathbb{P}(M = B)}{\mathbb{P}(T > 200)}$$

Se tiene que $\mathbb{P}(M = B) = 1/2$ y que $\mathbb{P}(T > 200 \mid M = B) = e^{-200\lambda_B} = e^{-1/2}$, pues cuando $M = B$ se tiene que $T \sim \exp(\lambda_B)$. Además, por regla de probabilidades totales, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > 200) &= \mathbb{P}(T > 200 \mid M = A)\mathbb{P}(M = A) + \mathbb{P}(T > 200 \mid M = B)\mathbb{P}(M = B)\\ &= \frac{e^{-200\lambda_A}}{2} + \frac{e^{-200\lambda_B}}{2}\\ &= \frac{e^{-2} + e^{-1/2}}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\mathbb{P}(M = B \mid T > 200) = \frac{e^{-1/2}}{e^{-2} + e^{-1/2}}.$$

2) Veamos:

$$\mathbb{P}(T > 400 \mid T > 200) = \frac{\mathbb{P}(T > 400, T > 200)}{\mathbb{P}(T > 200)} = \frac{\mathbb{P}(T > 400)}{\mathbb{P}(T > 200)},$$

donde $\mathbb{P}(T > 200)$ ya fue calculado, y $\mathbb{P}(T > 400)$ se calcula análogamente. Obtenemos:

$$\mathbb{P}(T > 400 \mid T > 200) = \frac{e^{-400\lambda_A} + e^{-400\lambda_B}}{e^{-200\lambda_A} + e^{-200\lambda_B}} = \frac{e^{-4} + e^{-1}}{e^{-2} + e^{-1/2}}.$$

(b) 1) Por el lema de Neyman-Pearson, sabemos que el test más potente tiene región de rechazo de la forma

$$R = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \frac{L(\vec{x};\lambda_0)}{L(\vec{x};\lambda_1)} \leq \eta \right\},$$

donde $\eta$ es una constante, y $L(\vec{x};\lambda)$ es la verosimilitud de la muestra. Se tiene que:

$$L(\vec{x};\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

Por lo tanto, la desigualdad que define la región $R$ corresponde a:

$$\eta \geq \frac{\lambda_0^n e^{-\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} x_i}}{\lambda_1^n e^{-\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i}} = \frac{\lambda_0^n}{\lambda_1^n} e^{n(\lambda_1-\lambda_0)\bar{x}},$$

lo cual equivale a

$$\text{Cte} = \frac{\log(\eta) + n\log(\lambda_1/\lambda_0)}{n(\lambda_1-\lambda_0)} \geq \bar{x},$$

como deseábamos. Notemos que mientras $\lambda_1 > \lambda_0$, no cambia el sentido de la desigualdad al dividir por $(\lambda_1 - \lambda_0)$ en el último paso. Esto significa que para cualquier $\lambda_1 > \lambda_0$, la forma de la región de rechazo es siempre la misma. Por lo tanto, el test sí es uniformemente más potente.

2) El $p$-valor corresponde a la probabilidad, dado $H_0$, de obtener un valor al menos tan extremo como el obtenido en la muestra. Como la forma de la región de rechazo es $\bar{X} \leq \text{Cte}$, esto quiere decir:

$$\begin{aligned} p\text{-valor} &= \mathbb{P}(\bar{X} \leq \bar{X}_{\text{obs}} \mid H_0) \\ &= \mathbb{P}\left( \frac{\bar{X} - 1/\lambda_0}{1/(\lambda_0\sqrt{n})} \leq \frac{0{,}6 - 1/\lambda_0}{1/(\lambda_0\sqrt{n})} \;\middle|\; \lambda = \lambda_0 \right) \\ &= \mathbb{P}\left( \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{0{,}6 - 1}{1/\sqrt{25}} \right) \\ &\approx \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq -2), \end{aligned}$$

donde en el último paso hemos utilizado el TCL, y donde $\mu = 1/\lambda$ y $\sigma^2 = 1/\lambda^2$ son la esperanza y varianza de la variable exponencial en estudio. Por simetría, la última probabilidad es igual a $\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \geq 2)$, y mirando una tabla normal obtenemos que el $p$-valor corresponde a 2,28 %. Como este valor es menor que $\alpha = 5\,\%$, corresponde rechazar $H_0$.