Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-5 Probabilidades y Estadística
Otoño 2013

Roberto Cortez
Francisco Castro
Alfredo Torrico

Pauta control 2

P1. (a) Podemos escribir $(U,V) = g(X,Y)$, con $g(x,y) = (x+y, x/y)$. Por el método del jacobiano, la densidad conjunta de U y V viene dada por la fórmula

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(g^{-1}(u,v))|\det Jg^{-1}(u,v)|.$$

Notemos que U y V son variables mayores que 0, pues X e Y lo son. Resolviendo el sistema $(u,v) = (x+y, x/y)$ para x e y, se llega a

$$(x,y) = (\frac{uv}{v+1}, \frac{u}{v+1}) = g^{-1}(u,v).$$

Calculemos el jacobiano de esta función:

$$Jg^{-1}(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\frac{uv}{v+1} & \frac{\partial}{\partial v}\frac{uv}{v+1} \\ \frac{\partial}{\partial u}\frac{u}{v+1} & \frac{\partial}{\partial v}\frac{u}{v+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{1}{v+1} & \frac{-u}{(v+1)^2} \end{bmatrix},$$

y entonces

$$|\det Jg^{-1}(u,v)| = \left|\frac{-uv}{(v+1)^3} - \frac{u}{(v+1)^3}\right| = \frac{u}{(v+1)^2}.$$

Además, como X e Y son independientes, la densidad conjunta es el producto de sus densidades marginales:

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)e^{-y}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y).$$

Utilizando todo lo anterior, tenemos que:

$$f_{U,V} = \frac{ue^{-\frac{u}{v+1}}}{(v+1)^2}\mathbf{1}_{[0,1]}(\frac{uv}{v+1})\mathbf{1}_{[0,\infty)}(\frac{u}{v+1}).$$

La segunda indicatriz vale 1 para cualquier par de valores (u,v) mayores que 0. Para que la primera indicatriz valga 1 debe cumplirse que $0 \leq \frac{uv}{v+1} \leq 1$, lo cual ocurre (para $u,v > 0$) si y sólo si $u \leq 1 + 1/v$. Por lo tanto:

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} \frac{ue^{-u/(v+1)}}{(v+1)^2} & \text{si } 0 < u \leq 1+1/v \text{ y } 0 < v \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(b) 1) Sabemos que la cantidad de clientes que llegan en 2 minutos es una variable de Poisson de parámetro $\mu \cdot 2 = 6$. Luego, la probabilidad buscada es:

$$\mathbb{P}(\text{Poiss}(6) = 4) = e^{-6}\frac{6^4}{4!} = 54e^{-6}.$$

2) Sabemos que el tiempo promedio que tarda un cliente en ser atendido, lo cual corresponde a una variable $\exp(\nu)$ para cierto ν, es de 2 minutos. Como el valor esperado de esta variable es $1/\nu$, se tiene que $\nu = 0{,}5$, es decir, cada caja atiende a tasa de 0,5 clientes por minuto. Por lo visto en clases, la suma de procesos de Poisson independientes es un nuevo proceso de Poisson, cuya tasa es la suma de las tasas. En nuestro caso, son 4 cajas, por lo cual la tasa de atención conjunta es $4\nu = 2$ clientes por minuto.

3) Sea S el tiempo que dura la falla. Condicionando en el resultado de S, tenemos:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(X|S=s) f_S(s) ds = \int_{0}^{\infty} \mathbb{E}(X|S=s) \lambda e^{-\lambda s} ds.$$

Al condicionar en el evento $\{S = s\}$, la duración de la falla está fija. Luego, dado que la llegada de clientes es un proceso de Poisson con tasa μ, en el evento $\{S = s\}$ se tiene que $X \sim \text{Poiss}(\mu s)$. Por lo tanto, $\mathbb{E}(X|S = s) = \mathbb{E}(\text{Poiss}(\mu s)) = \mu s$. Obtenemos entonces:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{0}^{\infty} \mu s \lambda e^{-\lambda s} ds = \frac{\mu}{\lambda} \int_{0}^{\infty} \lambda(\lambda s) e^{-\lambda s} ds = \frac{\mu}{\lambda} = 15,$$

donde hemos usado que la integral vale 1 pues el integrando es la densidad de una variable gamma de parámetros λ y $\theta = 2$.

P2. (a) Es directo ver que $e^{-(x/s)^{-\alpha}}$ es la primitiva de $\frac{\alpha}{s}\left(\frac{x}{s}\right)^{-(\alpha+1)} e^{-(x/s)^{-\alpha}}$. Sabiendo que $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y) dy$, se concluye que $F_X(x) = e^{-(x/s)^{-\alpha}} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$. Calculemos la mediana:

$$1/2 = \mathbb{P}(X \leq m) = F_X(m) = e^{-(m/s)^{-\alpha}}.$$

Despejando m, obtenemos:

$$m = s[-\log(1/2)]^{-1/\alpha} = s \log(2)^{-1/\alpha}.$$

(b) Calculemos $\mathbb{E}(X^k)$:

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx = \int_{0}^{\infty} x^k \frac{\alpha}{s} \left(\frac{x}{s}\right)^{-(\alpha+1)} e^{-(x/s)^{-\alpha}} dx.$$

Hacemos el cambio de variable $y = (x/s)^{-\alpha}$, de modo que $dy = -(\alpha/s)(x/s)^{-\alpha-1} dx$, con $x = s y^{-1/\alpha}$. Entonces:

$$\mathbb{E}(X^k) = -\int_{\infty}^{0} [s y^{-1/\alpha}]^k y e^{-y} dy = s^k \int_{0}^{\infty} y^{1-k/\alpha} e^{-y} dy = s^k \Gamma(1 - k\alpha).$$

Luego, $\mathbb{E}(X) = s\Gamma(1 - 1/\alpha)$. La varianza:

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = s^2[\Gamma(1 - 2/\alpha) - \Gamma(1 - 1/\alpha)^2].$$

(c) Para $y > 0$, tenemos:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(s(-\log(U))^{-1/\alpha} \leq y) = \mathbb{P}(U \leq e^{-(y/s)^{-\alpha}}) = e^{-(y/s)^{-\alpha}},$$

donde en el último paso hemos utilizado el hecho que $\mathbb{P}(U \leq u) = u$ para $u \in [0,1]$. Hemos obtenido entonces que F_Y coincide con la distribución acumulada de X, es decir, $Y \sim \text{Fréchet}(\alpha, s)$.

(d) Usando el hecho que $\text{mín}(a, b) \leq c$ si y sólo si $a \leq c$ y $b \leq c$, tenemos para $z > 0$:

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(\text{máx}(U, V) \leq z) = \mathbb{P}(U \leq z, V \leq z) = \mathbb{P}(U \leq z)\mathbb{P}(V \leq z),$$

donde en el último paso usamos la independencia de U y V. Obtenemos:

$$F_Z(z) = e^{-(z/s)^{-\alpha}} e^{-(z/t)^{-\alpha}} = e^{-(z/[s^\alpha + t^\alpha]^{1/\alpha})^{-\alpha}}.$$

Es decir, Z es una variable Fréchet de parámetros α y $[s^\alpha + t^\alpha]^{1/\alpha}$.

P3. (a) Sea X la cantidad de personas que se lleva su chaqueta. Supongamos que las personas están etiquetadas con los índices $\{1,\ldots,n\}$. Para un tal i, consideremos el evento E_i en que la i-ésima persona se lleva su propia chaqueta. Es directo que $X = \mathbf{1}_{E_1} + \cdots + \mathbf{1}_{E_n}$. Además, la cantidad de permutaciones de los índices que dejan fija la i-ésima coordenada es $(n-1)!$, con lo cual se obtiene

$$\mathbb{P}(E_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

Esto vale para todo i. Aplicando linealidad de la esperanza y recordando que para cualquier evento E se tiene que $\mathbb{E}(\mathbf{1}_E) = \mathbb{P}(E)$, obtenemos:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_1}) + \cdots + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E_n}) = \mathbb{P}(E_1) + \cdots + \mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} = 1.$$

(b) Calculemos la f.g.m. de $Z = X + Y$. Como X e Y son independientes, tenemos:

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\theta}\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\sigma} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\theta+\sigma}.$$

Es decir, $M_Z(t)$ coindide con la f.g.m. de una variable gamma de parámetros $\theta+\sigma$ y λ. Dado que la f.g.m. caracteriza la distribución de la variable, necesariamente $Z \sim \text{gamma}(\theta+\sigma,\lambda)$. Cuando θ y σ son números naturales, sabemos que X corresponde a la distribución de la suma de θ variables exponenciales independientes de parámetro λ; ídem para Y. Luego, al hacer $X + Y$ estamos sumando $\theta + \sigma$ variables exponenciales independientes, lo cual ya sabemos que tiene ley gamma$(\theta + \sigma, \lambda)$.

(c) Calculemos la marginal de X. Para $x \in (0,1)$, tenemos:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_0^x 2(x+y)dy = 2x^2 + x^2 = 3x^2,$$

mientras que para $x \notin (0,1)$ se tiene $f_{X,Y}(x,y) = 0, \forall y$, y entonces $f_X(x) = 0$. Obtenemos entonces que $f_X(x) = 3x^2\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$. Calculemos la marginal de Y para $y \in (0,1)$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = \int_y^1 2(x+y)dx = (1-y^2) + 2y(1-y) = 1 + 2y - 3y^2.$$

Nuevamente, para $y \notin (0,1)$ la marginal vale 0, con lo cual obtenemos que $f_Y(y) = [1+2y-3y^2]\mathbf{1}_{(0,1)}(y)$. Notemos que X e Y no son independientes, pues el producto de sus densidades marginales es $3x^2[1+2y-3y^2]$ para $x,y \in (0,1)$, lo cual no coincide con la densidad conjunta.