Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-3 Probabilidades y Estadística
Primavera 2015

Guía ejercicios 1

1. Sean E, F y G eventos.

a) Pruebe que $\mathbb{P}(EF^c) = \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(EF)$.

b) Pruebe que $\mathbb{P}(E^cF^c) = 1 - \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(EF)$.

c) Pruebe que la probabilidad de que exactamente uno de ellos ocurra es igual a $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 2\mathbb{P}(EF)$.

d) Pruebe que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(E \cup F \cup G) = {} & \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(G) \\ & - \mathbb{P}(E^cFG) - \mathbb{P}(EF^cG) \\ & - \mathbb{P}(EFG^c) - 2\mathbb{P}(EFG).\end{aligned}$$

2. Sean A y B dos eventos. Pruebe que si $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B)$ entonces $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

3. La probabilidad que una persona posea cuenta de ahorro es de 0,58. La probabilidad que posea cuenta vista es de 0,68. La probabilidad que posea ambas cuentas es de 0,34. Determine la probabilidad:

a) Que posea alguna de las cuentas.

b) Que posea solo cuenta de ahorro.

c) Que posea solo cuenta vista.

d) Si la persona posee cuenta de ahorro, determine la probabilidad que posea cuenta vista.

4. Juan, Pedro y Emilio lanzan por turnos una moneda, y gana el primero que obtiene cara (suponga que ese es el orden en que lanzan). Explique por qué puede tomarse como espacio muestral $\Omega = \{1, 01, 001, 0001, 00001, \dots\}$ y escriba los eventos "gana Juan", "gana Pedro" y "gana Juan o Pedro" como subconjuntos de dicho Ω.

5. Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Este se dice *no atómico* si $\forall B \subseteq \Omega$, con $\mathbb{P}(B) > 0$, $\exists A \subseteq \Omega$, $A \subseteq B$, tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(B)$.

a) Si $(\Omega, \mathbb{P})$ es no atómico y $x \in \Omega$, muestre que $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$.

b) Muestre que si Ω es numerable, $(\Omega, \mathbb{P})$ no puede ser no atómico.

c) Sea $(\Omega, \mathbb{P})$ no atómico. Muestre que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall B \subseteq \Omega$, con $\mathbb{P}(B) > 0$, $\exists A \subseteq \Omega$, $A \subseteq B$, tal que $0 < \mathbb{P}(A) < \varepsilon$. *Indicación:* muestre el resultado para ε de la forma $\mathbb{P}(B)/2^n$.

6. Dos dados equilibrados se lanzan sucesivamente n veces. Defina un espacio muestral y una probabilidad adecuados para este experimento. Calcule la probabilidad de que aparezca al menos un doble 6. ¿Cuál es el primer n tal que esta probabilidad es de $1/2$ ó más?

7. En un examen que consta de 10 preguntas, un estudiante debe responder exactamente 7.

a) ¿De cuántas formas puede el estudiante escoger las preguntas?

b) Si además se le exige que conteste al menos 3 de las primeras 5 preguntas, ¿de cuántas formas puede escoger las preguntas?

8. En un curso de 40 alumnos deben formarse 3 equipos de baby fútbol (5 jugadores) y 1 de vóleibol (6 jugadores). ¿De cuántas formas pueden armarse los equipos si

a) los equipos de fútbol son distinguibles entre sí?

b) los equipos de fútbol son indistinguibles entre sí?

9. De un equipo de 5 ingenieros y 7 técnicos debe constituirse una comisión de 2 ingenieros y 3 técnicos. ¿De cuántas formas puede hacerse si:

a) todos son igualmente elegibles?

b) hay un técnico en particular que debe estar en la comisión?

c) hay un ingeniero y un técnico que no pueden escogerse simultáneamente?

d) 2 de los 5 ingenieros también cuentan como técnicos? (distinguiendo el cargo asignado).

10. Probar (sin desarrollar las fórmulas) que

$$\binom{n+1}{4} = \frac{1}{3}\binom{\binom{n}{2}}{2}.$$

Indicación: considere un grupo de $n+1$ objetos de los cuales uno es especial y cuente de dos maneras el número de subconjuntos de tamaño 4.

11. Considere un grupo de n personas. Calculando de dos maneras el número de posibles selecciones de un comité y un jefe del comité, muestre que

$$\sum_{i=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

12. ¿Cuántas derivadas de orden r tiene una función de n variables de la forma $f(x_1, \dots, x_n)$?

13. Dado $n \in \mathbb{N}$, se define F_n como el conjunto de todas las funciones de $\{1, \dots, n\}$ en $\{1, \dots, n\}$. Dado $0 \leq k \leq n$, se define

$$A_k = \{f \in F_n : |\{i : f(i) = i\}| = k\},$$

es decir, A_k es el conjunto de funciones en F_n con exactamente k puntos fijos. Sea $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$.

a) Pruebe que $|A_k| = \binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$ y concluya que $|A| = n^n - (n-1)^n$.

b) Se escoge una función al azar en F_n. Calcular la probabilidad de que esa función tenga exactamente k puntos fijos, es decir, que pertenezca a A_k.

c) Calcular p_n, la probabilidad de escoger al azar una función con algún punto fijo.

d) Pruebe que $\lim_{n\to\infty} p_n = (e-1)/e$.

14. 45 personas indistinguibles suben a un bus vacío que tiene 60 asientos distinguibles ubicados de a pares, y cada persona se ubica en un asiento. ¿De cuántas formas pueden quedar ocupados los asientos si:

a) no hay restricciones en la forma de sentarse?

b) se utiliza al menos un asiento de cada par?

c) se utiliza al menos un asiento de cada par, y hay 2 personas que pueden escoger sentarse o quedar de pie?

15. En una competencia de ciclismo por países compiten 3 brasileros, 4 argentinos, 2 uruguayos y 1 chileno. Si el puntaje sólo toma en cuenta los países que los competidores representan, y no sus nombres, ¿de cuántas maneras puede resultar la competencia? ¿De cuántas formas puede ocurrir que de los 3 brasileros haya uno en los tres primeros puestos y 2 en los últimos 3?

16. Una mujer embarazada decide hacerse una ecografía para conocer el sexo de su futuro hijo. Se sabe que la probabilidad de que la ecografía diga que es hombre cuando en realidad es hombre, es de un 99 %, y que la probabilidad que diga que es mujer cuando en realidad es mujer es de un 90 %. Suponga que antes de la ecografía las probabilidades de hombre y mujer son iguales a 50 %.

a) Si la ecografía predice que será mujer, ¿cuál es la probabilidad que efectivamente lo sea?

b) Calcule la probabilidad de que la ecografía se equivoque al predecir el sexo.

17. Sean E y F dos eventos tales que $\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F) > 0$. Diremos que el evento F acarrea información negativa acerca de E, denotado por $F \downarrow E$, si $\mathbb{P}(E|F) \leq \mathbb{P}(E)$. Pruebe o dé un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

a) Si $F \downarrow E$, entonces $E \downarrow F$.

b) Si $F \downarrow E$ y $E \downarrow G$, entonces $F \downarrow G$.

18. Se lanza una moneda equilibrada dos veces. Sea A el evento en que la primera moneda cae cara, B el evento en que la segunda moneda cae cara, y C el evento en que ambas monedas caen para el mismo lado. Muestre que estos tres eventos son independientes de a pares (es decir, A independiente de B, B independiente de C y C independiente de A), pero no son independientes en conjunto.

19. Se dispone de dos monedas, una equilibrada y la otra con probabilidad $3/4$ de cara. Se escoge al azar una de las dos monedas, y se lanza dos veces. Sea C_i el evento en que el lanzamiento i resulta cara, para $i = 1, 2$. Calcule $\mathbb{P}(C_1)$, $\mathbb{P}(C_2)$ y $\mathbb{P}(C_1C_2)$. ¿Son independientes los eventos C_1 y C_2? Explique.

20. Se tienen 3 cartas en una caja, una de color negra por ambas caras, una de color rojo por ambas caras, y una de una cara negra y una roja. Se saca una carta al azar, de la cual solo se ve un lado, que es rojo. Si tuviera que apostar por el color de la otra cara, ¿hay alguna diferencia en apostar por rojo o negro? ¿Qué apostaría usted?

21. Un juego de dados tiene las siguientes reglas: se lanzan 2 dados. Si las suma es $2, 3$ ó 12 el jugador pierde. Si es 7 u 11, gana. Si es otro número, el jugador continua lanzando los dados hasta que el resultado sea o bien el resultado que obtuvo inicialmente, o bien un 7. Si es un 7, pierde. Si es el resultado inicial, gana. Calcule la probabilidad de que el jugador gane. *Indicación:* sea E_i el evento "el resultado inicial es i y el jugador gana". Explique por qué la probabilidad buscada es igual a $\sum_{i=1}^{12} \mathbb{P}(E_i)$ y calcule $\mathbb{P}(E_i)$. Para esto, note que $\mathbb{P}(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_{i,n})$, donde $E_{i,n}$ es el evento "el resultado inicial es i y el jugador gana en la n-ésima tirada".

22. Se sabe que el 20 % de la población chilena sufre de depresión. El plan UltraGold de la isapre Winnermédica otorga licencia por depresión teniendo un 90 % de certeza de que el paciente sufre la enfermedad. Un paciente llega a la isapre con los diagnósticos de dos Doctores A y B que indican que tiene depresión. La Isapre estima que que cuando se sufre de depresión, el Dr. A diagnostica la enfermedad en el 99 % de los casos, y el Dr. B en el 98 %. Pero además, cuando no se está enfermo de depresión, el Dr. A "diagnostica" esta enfermedad en el 60 % de los casos y el Dr. B en el 30 % (es decir, dan licencias falsas). Con esta información, ¿debe la isapre otorgarle licencia a este paciente? *Indicación:* suponga que, condicionalmente al estado de salud del paciente, los diagnósticos de los dos doctores son independientes.

23. Sean $E_1, \ldots, E_n$ eventos independientes. Pruebe que

$$\mathbb{P}(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{P}(E_i)).$$

24. Sea $S = \{1, \ldots, n\}$ y suponga que A y B son subconjuntos extraídos de manera independiente y al azar entre todos los posibles subconjuntos de S.

a) Pruebe que $\mathbb{P}(A \subseteq B) = (3/4)^n$. Indicación: condicione en la cantidad de elementos de B.

b) Pruebe que $\mathbb{P}(AB = \phi) = (3/4)^n$.

25. Considere dos dados equilibrados que se lanzan simultáneamente. Sea X la variable aleatoria igual al producto de los dos dados. Describa el espacio muestral Ω, calcule $\mathbb{P}(X = i)$, $i = 1, 2, \ldots$ y finalmente calcule la función de distribución discreta asociada a X.

26. Se dispone de una urna con n bolitas rojas indistinguibles entre sí, y m bolitas azules indistinguibles entre sí. Se van extrayendo bolitas al azar sin reposición y se ubican en una fila ordenada, hasta que se extraen todas las bolitas.

a) ¿Cuántas posibles filas resultantes hay?

b) Sea X el número de la extracción en que se acumulan r bolitas rojas (con $r \leq n$). Calcule la función de distribución discreta de X.

27. Sea $a \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{pmatrix} \Pi_{i=1}^{n}(Y - i) + a & aY \\ 1 & Y \end{pmatrix}$$

Calcular la probabilidad de que A sea invertible si $Y \sim \text{geom}(p)$. Calcule la misma probabilidad pero ahora asumiendo que Y es una variable aleatoria absolutamente continua.

28. Se quiere estimar la población total N de cierta especie animal en un ecosistema (desconocida). Para esto, se captura primero un número r de ellos, y se marcan. Después de un año, se captura una cantidad n. Sea X el número de animales que en la segunda captura están marcados. Calcule $\mathbb{P}(X = k)$. Se estimará a continuación el número N de la manera siguiente: suponga que se capturaron $X = k$ animales marcados. Entonces, un estimador de N será el número $\hat{N}$ que hace más probable ese valor dado de X (esto es lo que en estadística se llama un "estimador de máxima verosimilitud"). Encuentre $\hat{N}$. Compare el resultado con la idea intuitiva de que la proporción de animales marcados entre aquellos capturados debería ser la misma que en la población total. Estime N si $r = 50$, $n = 40$, y se obtuvo $X = 4$.