Problemas

P1. Suponga que una persona está situada a N cuadras al sur y M al oeste de la esquina a la cual quiere llegar.

(a) ¿Cuántos camino *inteligentes* existen entre ambos puntos? (entendiendo por camino *inteligente* aquel que sólo consta de desplazamientos que acercan al destino, es decir, unitarios de una cuadra tanto en dirección norte como oeste).

(b) Considere $M = N$. Fijándose que para llegar al destino en este caso, el camino elegido debe pasar por alguna intersección de las que forman la diagonal (de Nor-Oeste a Sur-Este) del cuadrilátero. Use lo anterior para calcular la suma de los cuadrados de los coeficientes binomiales sobre N.

P2. En el ascensor de un edificio de n pisos hay m personas, todas distinguibles. Suponiendo que las personas se bajan en cualquier piso con igual probabilidad, y sin importar lo que haga el resto de los pasajeros. Calcule la probabilidad:

(a) Que m_1 personas se bajen en el primer piso, m_2 personas se bajen en el segundo piso, y así respectivamente con $m_i \in \{0, ..., m\}$ $\forall\ i \in \{1, ..., n\}$ y $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i = m$

(b) Que todas las personas se bajen en pisos diferentes.

(c) Determine el número de formas en que se pueden bajar si:

(i) Las personas son distinguibles

(ii) Las personas son clones

P3. Para las siguientes identidades, fundamente con argumentos combinatorios

(a) Probar que

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

de una interpretación de la igualdad

(b) Probar que

$$\binom{n+m}{k} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \cdots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$$

Hint: Considere un grupo de n hombres y m mujeres. Â¿Cuantos grupos de tamaño k son posibles?

(c) El siguiente resultado es conocido como la identidad combinatorial de Fermat:

$$\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1}$$

Hint: Considere el conjunto de numeros de 1 hasta n. Â¿Cuantos subconjuntos de tamaño k tienen a i como su número más alto de dicho subconjunto.

P4. (a) Muestre que si $\mathbb{P}(A|D) \geq \mathbb{P}(B|D)$ y $\mathbb{P}(A|D^c) \geq \mathbb{P}(B|D^c)$, entonces $\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(B)$.

(b) Sean $A, B, C \subseteq \Omega$ tales que $0 < \mathbb{P}(B \cap C) < \mathbb{P}(B)$.
Pruebe que $0 < \mathbb{P}(B \cap C^c) < \mathbb{P}(B)$ y que:

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(A|B \cap C^c)\mathbb{P}(C^c|B)$$

(c) Suponga $\{A_1, A_2, ..., A_k\}$ partición de Ω y $B \subseteq \Omega$ tal que $\mathbb{P}(B) > 0$. Muestre que si $\mathbb{P}(A_1|B) < \mathbb{P}(A_1)$, entonces $\exists\, i \in \{2, ..., k\}$ tal que $\mathbb{P}(A_i|B) > \mathbb{P}(A_i)$

P5. Se sabe que la empresa JUNAEB de cierta región de Chile cada día debe repartir leche en 22 liceos distintos de la región. Nos interesa poder entender el problema de encontrar el camino más corto que recorra todos los liceos.

(a) i. Si consideramos solamente el orden en el que se visitan los liceos: Cuantos posibles caminos hay? Ocupando la estimación de Stirling encuentre el orden de magnitud.

$$\text{Stirling: } \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}} \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

ii. Si usted tiene un computador capaz de evaluar 10^9 caminos por segundo. Cuanto demoraría en resolver el problema? Es recomendable abordar de esta forma el problema?

(b) Dado el espacio muestral dado por el experimento 'sacar una carta de un mazo de naipes'. Encuentre los eventos A y B para que cumplan con ser:

i. Excluyentes y independientes.
ii. Excluyentes y no independientes.
iii. No excluyentes y independientes.
iv. No excluyentes y no independientes.

P6. Suponga que se le acerca un amigo con el siguiente problema:
Cuál de estos dos eventos es más probable?

- Obtener al menos un seis con cuatro lanzamientos de un dado.
- Obtener al menos un doble seis con 24 lanzamientos de un par de dados.

Su amigo cree que los dos son igual de probables basado en el siguiente razonamiento:

- Conseguir un par de seis en una sola tirada de dos dados es igual de probable que sacar dos seis en dos lanzamientos de un dado.
- La probabilidad de sacar dos seis en dos lanzamientos es $\frac{1}{6}$ tan probable como sacar un de seis en un lanzamiento.
- Para compensar esto, un par de dados debe lanzarse seis veces por cada un lanzamiento de un dado con el fin de conseguir la misma posibilidad de una pareja de seis.
- Por lo tanto, ambos eventos deben tener la misma probabilidad.

Analice los argumentos de su amigo e indique en que se equivoca. Calcule la probabilidad de ambos eventos.

P7. Para predecir el tiempo, un día es clasificado como seco o lluvioso. Por experiencia se sabe que la probabilidad de que un día sea igual al anterior se asume constante e igual a p.

(a) Si el 1 de abril es seco con probabilidad β, muestre que la probabilidad de que el n-ésimo día del año (contado a partir del 1 de abril) sea seco (P_n) queda dada por:

$$P_n = \left[\left(\beta - \frac{1}{2}\right)(2p-1)^{n-1}\right] + \frac{1}{2}$$

(b) Si el 16 de abril está seco, calcule la probabilidad de que el 14 de abril también lo haya estado. Para esto considere $\beta = 1,\ p = \frac{9}{10}$

P8. Cuando una máquina productiva está correctamente ajustada produce el 80% de los arículos de alta calidad y el resto de calidad media. En cambio, cuando la máquina está mal ajustada sólo produce el 40% de alta calidad. Suponga que el 30% de los días la máquina está mal ajustada.

(a) Se escogen 3 artículos producidos un día cualquiera encontrándose 2 de alta calidad y 1 de calidad media. Calcule la probabilidad que ese día la máquina estuviera correctamete ajustada.

(b) Bajo el mismo enunciado original, suponga ahora que un operario revisa todos los artículos sacando los de calidad media según su parecer. Si un artículo es de alta calidad, existe una probabilidad de 0,05 que el operario lo considere de calidad media; en cambio, si es de calidad media lo detecta con probabilidad 0,9. Los artículos puestos en venta son aquellos catalogados de alta calidad por el operario. Si un artículo es comprado por un cliente que reclama diciendo que le vendieron un artículo de calida media, ¿cuál es la probabilidad de que tenga razón?

P9. (a) Se lanza un dado equilibrado con n caras numeradas del 1 al n, y se anota el resultado obtenido. Se continua lanzada el dado hasta que se obtiene un resultado que haya sido anotado previamente. Sea X la variable aleatoria que denota la cantidad total de lanzamientos.¿Qué valores puede tomar la variable X?. Calcule su función de probabilidad.

(b) Sea E un experimento con espacio muestral Ω y A, B dos eventos disjuntos con probabilidades conocidas $\mathbb{P}(A)$ y $\mathbb{P}(B)$. Suponga que E se repite hasta que A ó B ocurra. Calcule la probabilidad de que A ocurra antes que B si E se reipitió k veces. Plantee el espacio muestral. Usando lo anterior, muestre que la probabilidad de que A ocurra antes que B está dada por $\dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)}$.

P10. (a) Suponga que en un juego usted gana un partido con probabilidad p. Cuando gana su capital se dobla y cuando pierde su capital se reduce a la mitad. Si comienza con C (UM) de capital y juega n partidos independientes, determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *Utilidad*.

(b) Se lanza un dado perfecto y posteriormente se lanza una moneda perfecta tantas veces como el resultado obtenido por el dado.

i.- Plantee un espacio muestral del expertimento.

ii.- Si X representa el número de sellos obtenidos. Calcule $\mathbb{P}(X = k) \quad \forall k \in R_x$.