

## Clase Auxiliar extra-extra

**Profesor:** Raul Gouet B.

**Auxiliares:** Cristóbal Valenzuela M. y Raimundo Saona U.

Recopilación de ejercicios del libro "Introduction to Probability Models", de Sheldon Ross.

### P1. Dado hasta más de 100

Suponga que continuamente lanzamos un dado hasta que la suma de todos los lanzamientos exceda 100, ¿cuál es el valor de la suma más probable al momento de terminar?

Se define  $N :=$  número en que termina la suma, ¿cuál es la esperanza de  $N$ ?

### P2. Tiempo de parada

Sea  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de variables aleatorias i.i.d. con valores a  $\{1, \dots, m\}$ . Se define

$$N := \min(\{n \in \mathbb{N} : X_n = X_0\})$$

Calcule  $\mathbb{E}(N)$ .

### P3. Poisson( $\lambda$ ), $\lambda$ aleatorio

Suponga que  $X$  es una variable Poisson con media  $\lambda$ . Además, el parámetro  $\lambda$  es, en sí, una variable aleatoria con distribución Exponencial de media 1. Muestre que

$$\mathbb{P}(X = n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Calcule  $\mathbb{E}(X)$ .

### P4. Beta multivariada, vector Dirichlet. Examen 2010, Raúl Gouet.

Sea  $(X, Y)$  un vector aleatorio con distribución Dirichlet de parámetros  $a, b, c > 0$ , es decir:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} x^{a-1} y^{b-1} (1-x-y)^{c-1} \mathbb{1}_A(x, y)$$

donde  $A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x + y \leq 1\}$ .

Se define  $U := \frac{Y}{X+Y}$ ,  $V := X + Y$ .

<sup>1</sup>Muestre que:

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)} (1-u)^{a-1} u^{b-1} v^{a+b-1} (1-v)^{c-1} \mathbb{1}_{(0,1)^2}(u, v)$$

Calcule  $f_U$  y  $f_V$  y muestre que  $U$  y  $V$  son independientes.

---

<sup>1</sup>Hint: Si  $X$  v.a. tiene densidad Beta( $a, b$ ), entonces:  $f_X(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-x)^{b-1} x^{a-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$