Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Probabilidad y Estadística MA 3403, 5/10/15, Prof. R. Gouet.

Solución Control #1

1. Considere un grupo de personas A constituido por m mujeres y n hombres. Se escoge un subconjunto $B \subseteq A$ de k personas al azar, donde $1 \leq k \leq n$. Calcule la probabilidad[1] de que

   a) (2 pts.) Todas las mujeres estén en B.
   Sol: Consideramos como espacio muestral el conjunto
   $$\Omega = \{B \subseteq A : |B| = k\},$$
   cuyo cardinal es $|\Omega| = \binom{m+n}{k}$. Suponemos espacio equiprobable, es decir, $P(\{\omega\}) = 1/|\Omega|, \forall \omega \in \Omega$. Sea el suceso T="todas las mujeres están en B", es decir,
   $$T = \{B \in \Omega : M \subseteq B\},$$
   donde $M \subseteq A$ es el conjunto de las mujeres en A. Entonces, como el espacio es equiprobable,
   $$P(T) = \frac{|T|}{|\Omega|}.$$
   Ahora debemos ver cuántos subconjuntos de A, con k elementos, contienen a M. En primer término supongamos que $k \geq m$ porque, de lo contrario $T = \emptyset$ y $P(T) = 0$. Notamos que cualquier $B \in T$ se puede escribir como $B = M \cup C$, donde C es un C es un subconjunto de H (los hombres en A) de tamaño $k - m$. Entonces $B \in T$ queda determinado por C y existen tantos B de este tipo como maneras de escoger C. Es decir, $|T| = \binom{n}{k-m}$ y, por lo tanto,
   $$P(T) = \frac{\binom{n}{k-m}}{\binom{m+n}{k}}.$$

   b) (2 pts.) B solo contenga mujeres.
   Sol: Sea S el suceso de interés, que se puede describir como
   $$S = \{B \in \Omega : B \subseteq M\}.$$
   Suponemos que $k \leq m$ porque si $k > m$ entonces B debe contener necesariamente algún hombre. En tal caso $P(S) = 0$. Notamos que los B de tamaño k que solo contienen mujeres son exactamente los subconjuntos de M, de tamaño k, de los cuales hay $\binom{m}{k}$. Entonces,
   $$P(S) = \frac{\binom{m}{k}}{\binom{m+n}{k}}.$$

   c) (2 pts.) B no contenga mujeres.
   Sol: Sea N el suceso de interés. Notar que N no es el complemento de de T (por si alguien pensó en esa variante); tampoco lo es de S. Si es lo mismo que pedir que B solo contenga hombres y, en ese sentido, se puede usar el resultado del apartado b), cambiando m por n. Comenzamos suponiendo que $k \leq n$, ya que, de lo contrario, $P(N) = 0$. Entonces, con la fórmula de b) obtenemos
   $$P(N) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}}.$$

[1] Analice todos los casos posibles y exprese sus resultados en función de m, n, k.

2. La empresa alemana UW (UmweltschädlicheWagen) produce automóviles diesel, 20 % de los cuales se fabrican en la planta A, 20 % en la planta B y el resto en la planta C. Se sabe que en la planta A el 90 % de los autos tienen un software que falsea las emisiones de contaminantes; en la planta B solo un 60 % tiene este software y en la planta C, la tasa es igual a la planta A. Suponga que el gobierno federal selecciona un auto de esta marca al azar. Calcule la probabilidad de que

   a) (1.5 pts.) El auto no tenga el software.
   Sol: Sea $S =$ "el auto tiene el software", $A =$ "viene de la planta A"; $B =$ "viene de la planta B" y $C =$ "viene de la planta C". Sabemos que $P(A) = 0{,}2; P(B) = 0{,}2; P(C) = 0{,}6$. Por otra parte, tenemos las probabilidades condicionales $P(S|A) = 0{,}9; P(S|B) = 0{,}6; P(S|C) = 0{,}9$. Usamos probabilidades totales para calcular $P(S)$:

   $$P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|B)P(B) + P(S|C)P(C) = 0{,}9 \times 0{,}2 + 0{,}6 \times 0{,}2 + 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}84,$$

   de donde obtenemos $P(\overline{S}) = 1 - P(S) = 0{,}16$.

   b) (1.5 pts.) Que venga de la planta A dado que lo tiene.
   Sol: se pide calcular $P(A|S)$. Para ello usamos la fórmula de Bayes:

   $$P(A|S) = \frac{P(S|A)P(A)}{P(S)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}2}{0{,}84} = 0{,}2143.$$

   c) (1.5 pts.) Que tenga el software y venga de la planta C.
   Sol: se pide calcular $P(S \cap C)$. Usando la fórmula para la intersección tenemos

   $$P(S \cap C) = P(S|C)P(C) = 0{,}9 \times 0{,}6 = 0{,}54.$$

   d) (1.5 pts.) Que no venga de la planta B sabiendo que no tiene el software.
   Sol: se pide $P(\overline{B}|\overline{S})$. Calculamos

   $$P(B|\overline{S}) = \frac{P(\overline{S}|B)P(B)}{P(\overline{S})} = \frac{(1 - P(S|B))P(B)}{1 - P(S)} = \frac{(1 - 0{,}6) \times 0{,}2}{0{,}16} = 0{,}5,$$

   de donde obtenemos $P(\overline{B}|\overline{S}) = 1 - P(B|\overline{S}) = 0{,}5$.

3. Un automovilista debe viajar de la ciudad A a la ciudad C, pasando por B. Para ir de A a B hay un solo camino que tiene un puente, que puede estar operativo o no (puente cortado). Si el puente está operativo entonces puede viajar de A a B y caso contrario, el viaje debe aplazarse hasta que sea reparado el puente. Para ir de B a C hay dos caminos: el camino nuevo que tiene dos puentes y el camino viejo, que tiene un puente. Igual que antes, para usar cualquiera de los dos caminos, es necesario que los puentes respectivos estén operativos. Debido a los continuos temblores los 4 puentes están operativos, cada uno con probabilidad $p \in (0, 1)$. Se sabe también que los puentes son independientes entre si. Se pide calcular (para cualquier p y evaluar los casos particulares $p = 0, 1/2, 1$) la

   a) (1 pt.) Probabilidad de realizar viaje de A a C.
   Sol: Sean los sucesos $P_i =$ "el puente i está operativo", para $i = 1, 2, 3, 4$. Suponemos que el punte 1 está entre A y B, que los puentes 2 y 3 están en el camino nuevo entre B y C y que el punte 4 está en el camino viejo, de B a C. Tenemos, por enunciado, que los sucesos $P_i, i = 1, \dots, 4$ son independientes y que $P(P_i) = p, i = 1, \dots, 4$. Para ir de A a C es necesario que el puente 1 esté operativo y que el camino nuevo o el viejo, entre B y C estén operativos.

Esto se puede escribir en términos de los sucesos P_i como sigue, siendo V el suceso "se puede viajar de A a C":

$$V = P_1 \cap ((P_2 \cap P_3) \cup P_4)).$$

Usando lo que sabemos sobre los sucesos P_i tenemos

$$P(V) = P(P_1)P((P_2 \cap P_3) \cup P_4)) = P(P_1)(P(P_2 \cap P_3) + P(P_4) - P(P_2 \cap P_3 \cap P_4))$$
$$= p(p^2 + p - p^3) = p^2(p + 1 - p^2).$$

Para $p = 1$ tenemos $P(V) = 1$, para $p = 1/2, P(V) = 5/16$ y para $p = 0, P(V) = 0$.

b) (1 pt.) Probabilidad de realizar viaje de A a C, habiendo llegado a B.

Sol: si ha llegado a B sabemos que P_1 ocurre entonces se pide calcular $P(V|P_1)$. Tenemos

$$P(V|P_1) = \frac{P(V \cap P_1)}{P(P_1)} = \frac{P(V)}{P(P_1)} = p(p + 1 - p^2).$$

Para $p = 1$ tenemos $P(V|P_1) = 1$, para $p = 1/2, P(V|P_1) = 5/8$ y para $p = 0, P(V|P_1) = 0$.

c) (1 pt.) Probabilidad de realizar viaje de A a C, sabiendo que uno de los 4 puentes está cortado.

Sol: El suceso "exactamente un puente cortado" se escribe como

$$U = (\overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap \overline{P_3} \cap P_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \overline{P_4})$$

y su probabilidad está dada por

$$P(U) = 4p^3(1 - p).$$

Se requiere calcular $P(V|U) = \frac{P(V \cap U)}{P(U)}$. Por otra parte, $V \cap U$ se descompone en los sucesos: $V \cap (\overline{P_1} \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) = \emptyset$; $V \cap (P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3 \cap P_4) = (P_1 \cap \overline{P_2} \cap P_3 \cap P_4)$; $V \cap (P_1 \cap P_2 \cap \overline{P_3} \cap P_4) = (P_1 \cap P_2 \cap \overline{P_3} \cap P_4)$; $V \cap (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \overline{P_4}) = (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap \overline{P_4})$. Estos sucesos tienen probabilidades respectivas $0, p^3(1 - p), p^3(1 - p), p^3(1 - p)$. Por lo tanto,

$$P(V|U) = \frac{3p^3(1 - p)}{4p^3(1 - p)} = \frac{3}{4}.$$

Para llegar a este resultado también se puede razonar de la siguiente manera: sabiendo que hay exactamente un puente cortado y dado que son independientes y tienen las mismas probabilidades, la probabilidad de que esté cortado el puente 1 es $1/4$, lo que implica que no puede viajar. En los otros casos si puede viajar, lo que tiene probabilidad $3/4$.

d) (1 pt.) Probabilidad de realizar viaje de A a C, sabiendo que al menos uno de los 4 puentes está cortado.

Sol: Al menos uno de los puentes cortados es el complemento de todos los puentes operativos, es decir de $T = P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4$, cuya probabilidad es $P(T) = p^4$. Se pide

$$P(V|\overline{T}) = \frac{P(V \cap \overline{T})}{1 - P(T)} = \frac{P(V) - P(V \cap T)}{1 - P(T)} = \frac{P(V) - P(T)}{1 - P(T)} = \frac{p^2(p + 1 - p^2) - p^4}{1 - p^4}.$$

Para $p = 1$ resulta que $P(V|\overline{T})$ no se puede calcular porque $P(\overline{T}) = 0$; para $p = 1/2, P(V|\overline{T}) = 4/15$ y para $p = 0, P(V|\overline{T}) = 0$.

e) (2 pts.) Probabilidad de que haya un puente cortado, sabiendo que hizo el viaje de A a C.

Sol: Se pide calcular

$$P(U|V) = \frac{P(V|U)P(U)}{P(V)} = \frac{\frac{3}{4}4p^3(1 - p)}{p^2(p + 1 - p^2)} = \frac{3p(1 - p)}{p + 1 - p^2}.$$

Para $p = 1$ resulta $P(U|V) = 0$; para $p = 1/2$ resulta $P(U|V) = (3/4)/(5/4) = 3/5$; para $p = 0$ resulta $P(U|V) = 0$.