MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 14

1. Considere el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy}&=0, \quad y>0,\ -\infty<x<\infty,\\ u(x,0)&=f(x), \quad -\infty<x<\infty,\\ u(x,\infty)&=0, \quad -\infty<x<\infty. \end{aligned}$$

   a) Aplique transformada de Fourier con respecto a x a la EDP, aplique condiciones de borde y pruebe que la solución esta dada por

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{\infty} e^{ixs}e^{-y|s|}\hat{f}(s)ds.$$

   b) Muestre que la antitransformada de $e^{-a|s|}$ es $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+x^2}$, para luego demostrar que

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{\infty}^{\infty}\frac{y}{y^2+z^2}f(x-z)dz$$

2. Resuelva el problema de Dirichlet en un disco plano

$$\begin{aligned} \Delta u&=0 \quad 0<\rho<R,\ -\pi<\theta<\pi\\ u(R,\theta)&=T \quad 0<\theta<\pi\\ u(R,\theta)&=-T \quad -\pi<\theta<0 \end{aligned}$$

   Recordando el Laplaciado en coordenadas cilíndricas $\Delta u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, siga los siguientes pasos

   a) Usando separación de variables $u(\rho,\theta)=R(\rho)T(\theta)$ pruebe que $\frac{\rho}{R}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho R')=-\frac{T''}{T}=\lambda$, λ constante.

   b) Imponga las condiciones de periodicidad $T(\pi)=T(-\pi)$, y $T'(\pi)=T'(-\pi)$ para encontrar una familia numerable de soluciones del tipo $R(\rho)=\rho^p$ e imponga la condición $|R(0)|<\infty$ para encontrar el $R_k(\rho)$ correspondiente.

   c) Muestre que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sen((2n+1)x)}{2n+1}=\pi/4$.

   d) Imponga las condiciones de borde $u(R,\theta)=\pm T$ para encontrar u.