

Auxiliar 12

Series de Fourier

Resumen

Definición 1. Sea $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Diremos que f admite un desarrollo en serie de Fourier en $[-l, l]$ si existen escalares $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ tales que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right], \quad \forall x \in [-l, l]$$

Coeficientes Si f tiene expansión en serie de Fourier, entonces

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Problemas

- Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la única función tal que $f(x) = x$ si $x \in [-\pi, \pi)$ y $f(x + 2n\pi) = f(x)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.
 - Encuentre la serie de Fourier de f .
 - Pruebe que la serie no converge uniformemente.
 - Para cada $x \in \mathbb{R}$, encuentre la suma de la serie.

- Sea $f \in \mathcal{C}^1$, 2π -periódica, tal que $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$.

- Pruebe la identidad de Parseval:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

- Deduzca que:

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x) dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2).$$

- Dadas las hipótesis anteriores, concluya la desigualdad de Wirtinger:

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x) dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x) dx.$$

- d) Pruebe que en la parte anterior se tiene la igualdad si y solo si $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$.
3. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función de periodo 2π tal que $f(x) = x^3$ para $x \in [-\pi, \pi)$.
- a) Pruebe que la serie de Fourier de f tiene la forma de $\sum_{n \geq 1} b_n \sin nx$ y escriba una fórmula integral para b_n .
- b) Pruebe que la serie de Fourier converge para todo x .
- c) Demuestre la siguiente identidad:

$$\sum_{n \geq 1} b_n^2 = \frac{2\pi^6}{6}.$$