MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 10

Resumen

Teorema 1. *(Formula de Cauchy) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $D(\bar{p}, r) \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p, r)$ se tiene la formula integral de Cauchy:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

donde $\partial D(p, r)$ es la circunferencia de centro p y de radio r recorrida en sentido antihorario.

Problemas

1. Calcule la siguiente integral impropia considerando $\beta > 0$:

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) \cos(2\beta x) dx,$$

Indicación: Considere el rectángulo de vértices $R, R + i\beta, -R, -R + i\beta$ y estudie el límite cuando $R \to \infty$.

2. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Definamos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $h(z) = \int_0^1 f(t)cos(zt)dt$. El objetivo de este problema es demostrar que f es entera, es decir, es holomorfa en todo el plano complejo. Para ello proceda de la siguiente forma:

a) Expanda en serie de potencias la función $cos(tz)$.

b) Pruebe que $\forall z \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$h(z) = \sum_{n \geq 0} \left[\frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 t^{2n} f(t) dt \right] z^{2n}$$

c) Muestre que $\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $|\int_0^1 t^{2n} f(t)dt| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$

d) Concluya que h es holomorfa en todo el plano complejo.

e) Usando las partes anteriores, muestre que

$$h'(z) = -\int_0^1 t f(t) sin(zt) dt$$

3. Calcule la integral real $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}dx$.

   Proceda como se indica:

   a) Para $R > 0$, sea $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq R, \ 0 \leq arg(z) \leq \pi/2\}$, y sea $\Gamma = \partial D$. Pruebe que

   $$\int_\Gamma \frac{1}{1+z^4}dz = \frac{\sqrt(2)\pi(1-i)}{4}$$

   Sugerencia: Le ayudará encontrar las raices de $z^4 + 1 = 0$.

   b) Si $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = R, \ 0 \leq arg(z) \leq \pi/2\}$, pruebe que $\int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4}dz \to 0$, si $R \to \infty$.

   c) Concluya.