

MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Mauricio Soto

Auxiliar: Felipe Salas.



Auxiliar 9

1. Determine el dominio de convergencia de las siguientes series:

a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(z-i)^{n!}.$$

c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n)z^n.$$

b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

d)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n.$$

Indicación: (d) Use la fórmula de Stirling: $n! \sim cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, para alguna constante $c \geq 0$.

2. Determine la expresión en serie de potencias en torno al origen para las siguientes funciones:

a)
$$f(z) = e^{-z^2}.$$

b)
$$f(z) = \frac{z^2}{(1+z)^2}.$$

Calcule además el radio de convergencia en cada caso.

3. [Integrales de Fresnel]. Pruebe que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

4. Calcule la siguiente integral impropia considerando $\beta > 0$:

$$\int_0^{\infty} \exp(-x^2) \cos(2\beta x) dx,$$

Indicación: Considere el rectángulo de vértices $R, R+i\beta, -R, -R+i\beta$ y estudie el límite cuando $R \rightarrow \infty$.