MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 7

Resumen

Definición 1. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Diremos que f es derivable en z_0 si existe el límite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Si f es derivable en todo $z \in \Omega$ diremos que f es holomorfa en Ω.

Teorema 1. *Una función f es derivable en $z_0 \in \Omega$ si es derivable como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y además se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann (C-R):*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

En tal caso $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$

Problemas

1. Demuestre que si $f \in H(\Omega)$ y $|f|$ es constante en Ω, entonces f es constante en Ω.

2. Definamos los siguientes operadores diferenciales:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

   a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las condiciones de Cauchy?Riemann si y solo si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

   b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega$, $f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

   c) Explicite en términos de u y v la ecuación $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$.

   d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase $\mathcal{C}^2$, se define el laplaciano de f como:

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v,$$

   y si $\Delta f = 0$ entonces se dice que f es armónica en Ω. Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω. Finalmente pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y solo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω.

3. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con Ω abierto no vacío. Supongamos que en coordenadas cartesianas se tiene que $z = x + iy$, $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$, con u y v diferenciables.

   Verifique que $u(r, \theta) = \hat{u}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ y $v(r, \theta) = \hat{v}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, además pruebe que f es holomorfa si y solo si:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} & = \dfrac{\partial u}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} & = -\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

   Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.