MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 6

1. (a) Evalúe la siguiente integral de linea: $\oint_C y^2dx + x^2dy$
Donde C es la curva que se obtiene al unir los puntos: $(0,0) \to (1,0) \to (1,1) \to (0,0)$.
   (b) Calcule el área encerrada por la curva de ecuación: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$

2. Sea $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$. Considere una superficie regular S y $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, pruebe que:

$$\iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{\partial S}(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} & \text{Si } S \text{ tiene borde } \partial S \neq \emptyset \\ 0 & \text{Si } S \text{ es una superficie cerrada} \end{cases}$$

3. Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^3,\ 2xyz^3,\ 3xy^2z^2 + y)$$

y la curva C definida como la intersección del cilindro $x^2 + z^2 = 4$ con la semi esfera $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4$, $x \leq 0$, orientada de abajo hacia arriba.

   (a) Calcule el rotor de $\vec{F}$ y deduzca que el campo $\vec{F}$ es la suma de dos campos $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ donde $\vec{F}_1$ es conservativo y $\vec{F}_2$ tiene la forma $\vec{F}_2(x,y,z) = (0,0,g(y))$.
   (b) Encuentre un potencial de $\vec{F}_1$.
   (c) Calcule la integral de $\vec{F}$ sobre la curva C.

4. Sea $\vec{r} = (x,y,z)$, $r = \|\vec{r}\|$ y la superficie $\Sigma = \partial\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 \ : \ a \leq r \leq b\}$ orientada hacia el exterior. Sean $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ambas de clase C^1 tales que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r^2)\vec{r}.$$

   (a) Verificar que

$$r^2 div(\vec{F}(\vec{r})) = \frac{d}{dr}(r^3 f(r^2)).$$

   (b) Concluir que

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi(b^3 f(b^2) - a^3 f(a^2))$$

   (c) Con la misma notación, sea $\mathcal{C}$ una curva de extremos $O = (0,0,0)$ y $A = (0,0,a)$, regular por pedazos, recorrida desde O hasta A. Verificar que

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^a f(t)dt.$$

Indicación: Calcular $rot(\vec{F})$.