**MA2002-6: Cálculo Avanzado y Aplicaciones**
**Profesor:** Mauricio Soto.
**Auxiliar:** Felipe Salas.

# Auxiliar 5

## Resumen

**Definición:** (Integral de trabajo o de línea). Sea $\Gamma$ una curva simple y regular, y sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Definimos la integral de trabajo (o integral de línea) de $\vec{F}$ sobre la curva $\Gamma \subseteq \Omega$ por

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt,$$

donde $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de $\Gamma$.

**Teorema** (de Stokes) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y regular por pedazos, cuyo borde $\partial S$ es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $C^1$ definido sobre un abierto $U$ que incluye la superficie $S$ y su borde $\partial S$.
Entonces

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA$$

Con $\hat{n}$ la normal obtenenida por la regla de la mano derecha, siguiendo la orientación de $\partial S$.

## Problemas

**P1.** **Ejercicio 1** Sea $S$ la superficie de $\mathbb{R}^3$ que se encuentra en la región $-h \leq z \leq h$, donde $h > 0$ y definida implícitamente en coordenadas cilíndricas:

$$\rho = 1 + z, \quad \text{en } 0 \leq z \leq h, \text{ y } \rho = 1 - z, \quad \text{en } -h \leq z < 0$$

(a) Bosqueje y encuentre una parametrización para la superficie $S$.
(b) Considere el campo vectorial $\vec{F} = (5/\rho)\hat{\rho} + e^{-z^2}\hat{\theta} + 3z\hat{k}$ definido en coordenadas cilíndricas. Determine la región donde $\vec{F}$ es diferenciable.
(c) Calcule por definición el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie $S$.
(d) Calcule el flujo anterior haciendo uso del teorema de la divergencia para un volumen adecuado.

**P2.** Calcular la siguiente integral de linea:

$$\int_\Gamma (x - z)dx + (z - y)dy + (x - y)dz$$

Con $\Gamma$ la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano de ecuación $x + z = 1$.

**P3.** Continuación auxiliar anterior: Si $\vec{G} = 2xe^{-y}\hat{\imath} + (cos(z) - x^2e^{-y})\hat{\jmath} - ysin(z)\hat{k}$. Demuestre que $\vec{G}$ es conservativo encontrando un potencial escalar $\phi$ tal que $\nabla\phi = -\vec{G}$. Luego calcule $\oint_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r}$

**P4.** Sea $\Gamma$ la curva obtenida al intersectar el casquete esférico unitario y la superficie de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Considere $\Gamma$ recorrida en el sentido antihorario. Calcule la circulación (integral de linea) a lo largo de $\Gamma$ del siguiente campo descrito en coordenadas cilíndricas: $\vec{F} = (z - \rho)\frac{\theta^2}{2}\hat{\rho} + z\theta\hat{\theta} + \frac{\theta^2}{2}\rho\hat{k}$