MA2002-6: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Mauricio Soto.
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 3

P1. Diremos que un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : \ z \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}^3$ tiene simetría cilíndrica si puede escribirse en coordenadas cilíndricas como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_\rho(\rho)\hat{\rho}, \qquad \rho > 0$$

Para alguna función $\vec{F} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1.

a) Muestre que todo campo con simetría cilíndrica es irrotacional y además verifique que $div\vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(F_\rho\rho)$.

b) Deduzca que un campo $\vec{F}$ con simetría cilíndrica es selenoidal (es decir, $div\vec{F} = 0$ en $\{\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\})$ ssi $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{\rho}\hat{\rho}$ para alguna constante $K \in \mathbb{R}$.

c) Demuestre que esta función vectorial puede ser escrita como el gradiente de una función potencial U tal que $\vec{F} = \nabla U$.

P2. De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene como potencial $U(r) = Ke^{-\alpha r}/r$ (en esféricas) para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$.

a) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

b) Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete esférico $r = a$ $(a > 0)$ orientado según la normal exterior.

c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. (recuerde que $\Delta u = div(\nabla u)$).

d) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior, entonces

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_\Omega U dV$$

¿Contradice este resultado al teorema de Gauss?.

P3. Supongamos que un fuido está sometido a un campo de velocidades dado por $\vec{F}(x,y,z) = (x - yz)\hat{i} + (y + xz)\hat{j} + (z + 2xy)\hat{k}$.
Sea S_1 la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ que está dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
Sea S_2 la porción de la superficie de la esfera que se encuentra por fuera del cilindro. Sea Ω el volumen limitado por S_1 y S_2.

a) Calcule $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n} dA$ con $\hat{n}$ la normal interior al cilindro.

b) Utilizando el teorema de la divergencia, calcule el flujo neto que pasa a través de las paredes de la región Ω.

c) Calcule directamente el flujo a través de S_2 orientada según la normal exterior a la esfera.