**MA2002-6 Cálculo Avanzado y Aplicaciones**
**Profesor:** Mauricio Soto
**Auxiliar:** Felipe Salas.

# Auxiliar 1

P1. (a) Si $\hat{k}$ es el vector unitario segun el eje Z y $\hat{r}$ es el vector unitario radial de las coordenadas esfericas, demuestre que

$$\hat{k} = cos(\varphi)\hat{r} - sen(\varphi)\hat{\varphi}$$

donde $\varphi$ es el ángulo entre $\vec{r}$ y el eje Z.

(b) Considere el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por:

$$f = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{\hat{k} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

donde $\alpha$ es un número real.

Calcule $\vec{F} = -\nabla f$ expresado en la base ortonormal $\{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\theta}\}$ de las coordenadas esféricas.

(c) Considere el campo vectorial

$$A = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{\hat{k} \times \vec{r}}{r^3}$$

Calcule $\nabla \times \vec{A}$.

P2. Considere un cono cuyo vértice se encuentra en el origen, su eje de simetría es el eje Z y posee una altura $h$ y radio $a$. Parametrice su manto, y parametrice una hélice que parte desde el vértice y termina en la cara plana.

P3. (a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una función clase $C^1$. Demuestre que

$$rot \int_a^b \varphi(\vec{r}, t)dt = \int_a^b rot\ \varphi(\vec{r}, t)dt$$

Indicación: Puede usar la regla de Leibnitz: $\frac{\partial}{\partial u} \int_a^b \varphi(\vec{r}, t)dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u}\varphi(\vec{r}, t)dt$, donde $\vec{r} = (x, y, z)$ y $u$ representa cualquier variable cartesiana.

(b) Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esfericas, donde $r = \|\vec{r}\|$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que $div\ \vec{F} = 0$ y pruebe que

$$rot[\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}] = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt}\vec{F}(t\vec{r}). \tag{1}$$

(c) Sea ahora $\vec{F}$ un campo cualquiera tal que $div\ \vec{F} = 0$ en una bola $B$ de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Entonces se puede probar (no es necesario hacer) que (1) es válida en $B$. Definamos el campo vectorial $\vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 [\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}]dt$. Usando lo anterior concluya que $rot\ \vec{G} = \vec{F}$ en $B$.