MA2002-5 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Rodrigo Lecaros L.
Auxiliares: Diego Marchant D., Manuel Suil J..
-

Guía de ejercicios C1

1. Se definen las coordenadas parabólicas (ξ, η, ϕ) mediante las relaciones:

$$x = \xi\eta\cos(\phi), \quad y = \xi\eta\,\mathrm{sen}(\phi), \quad z = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)$$

donde $\xi, \eta > 0$ y $\phi \in [0, 2\pi]$. Calcule el gradiente y el Laplaciano en estas coordenadas.

2. Calcule

$$\iint_A \vec{R} \cdot \vec{dS}$$

donde

$$\vec{R}(x,y,z) = (-xz, -yz, z^2)$$

y A es la superficie del cono $z^2 = x^2 + y^2$ delimitada por $z = 1$ y $z = 4$.

3. Calcule

$$\iint_S \vec{H} \cdot \vec{dS}$$

donde

$$\vec{H}(x,y,z) = sen^3(y+z)\hat{i} + e^{x^2 - z}\hat{j} + y^2\hat{k}$$

y

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 3\}$$

4. Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x\,\mathrm{sen}(z) + y^2, z^3 - y, x^2 + \cos(z))$ a través de la superficie S formada por el manto del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z \leq 2$ (orientado hacia afuera del cono) y el anillo $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, z = 2$ (orientado hacia arriba).

5. Considere la superficie S definida por

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 4, \quad z \leq 1$$

que corresponde a parte de un toro con círculo central en el plano XY de radio 3 y radio menor que 2, orientada según la normal exterior. Calcule

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, dA$$

donde $\vec{F}$ es el campo

$$\vec{F}(x,y,z) = (-2xye^{y^2}, e^{y^2} - \frac{yz}{1+z^2}, x^2 + \log(\sqrt{1+z^2}))$$

6. Considere el campo en coordenadas esféricas dado por $\vec{F} = r^2\hat{r} + r\varphi\,\mathrm{sen}^3\,\theta\hat{\varphi}$. Calcule $(\vec{F})$ en todo punto del dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$, vale decir, $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$. Sea Ω la región de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ que intersecta al cono infinito $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Defina $\Omega(\varepsilon) = \{(x,y,z) \in \Omega \,|\, x^2 + y^2 \geq \varepsilon\}$ para ε pequeño. Bosqueje $\Omega(\varepsilon)$ y encuentre el valor de $I = \lim_{\varepsilon \to 0} \iiint_{\Omega(\varepsilon)} \vec{F}\, dV$.

7. Sea Σ la superficie que se obtiene al intersectar el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el volumen definido por las desigualades: $z^2 + x^2 \leq 4 + y^2$, $y \geq 0$.
El propósito de este ejercicio es calcular usando el Teorema de Stokes, la integral:

$$\oint_{\partial\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{F} = (\rho \operatorname{sen}(\theta) + z)\hat{\rho} + \frac{z}{\rho} \operatorname{sen}(\theta)\hat{\theta} + (z^3 - \rho\cos(\theta))\hat{k}$.

a) Calcule $rot(\vec{F})$.

b) Muestre que, en coordenadas cilíndrica, Σ se parametriza como sigue:

$$\vec{\sigma} : D = \{(\theta, z) : \theta \in (0, \pi), -2\sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta) \leq z \leq 2\sqrt{2}\operatorname{sen}(\theta)\} \to \mathbb{R}^3$$

$$(\theta, z) \mapsto \vec{\sigma}(\theta, z) = (2\cos(\theta), 2\operatorname{sen}(\theta), z)$$

c) Use el Teorema de Stokes para concluir, explicando claramente por qué lo puede usar.

8. Calcule

$$\int_{\Gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r}$$

donde

$$\vec{G}(x, y, z) = (tan(y) + 2z^3)\hat{\imath} + (xsec^2(y))\hat{\jmath} + (6xz^2 + 2z)\hat{k}$$

y

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 4x^2 + y^2 + 10z^2 = 4, 2x + y + z = 2, x, y, z \geq 0\}$$

que va desde el punto $(1, 0, 0)$ al punto $(0, 2, 0)$.

9. Considere la siguiente identidad:

$$\iiint_V (v \bigtriangleup u - u \bigtriangleup v)\, dV = \iint_S \left[v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n} \right] dS,$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ y n es la normal exterior unitaria. Sea ahora una bola $B_R(X_0)$ de radio R y centro $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y una función u armónica en B_R, $\bigtriangleup u = 0$. Definamos

$$v = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

a) Verificar que v es armónica en $B_R \setminus \{(x_0, y_0, z_0)\}$.

b) Usando la fórmula de Green en el plano en el dominio $B_R(X_0) \setminus B_\varepsilon(X_0)$, para $\epsilon > 0$ y tomando límite $\varepsilon \to 0$, demostrar

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{\partial B_R(X_0)} u(x, y, z) dS$$

10. *a)* Sea γ una curva simple suave por tramos, cerrada en $\mathbb{R}^2$ y sea D la región interior a γ. Demuestre que:

$$\acute{A}rea(D) = \int_\gamma ydx + 2xdy = \int_\gamma xdy = \int_\gamma -ydx = \frac{1}{2}\int_\gamma -ydx + xdy$$

.

b) Considere la función en $\mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = x\hat{\jmath}$. Aplicando el teorema de Green a esta función, calcule el área total encerrada por la curva de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.
Hint: Use en caso de que lo necesite las siguientes identidades

$$\int_0^{2\pi} \cos^m\theta \operatorname{sen}^n\theta\, d\theta = \frac{n-1}{m+n}\int_0^{2\pi} \cos^m\theta \operatorname{sen}^{n-2}\theta\, d\theta, \quad \int_0^{2\pi} \cos^m\theta\, d\theta = \frac{m-1}{m}\int_0^{2\pi} \cos^{m-2}\theta\, d\theta.$$

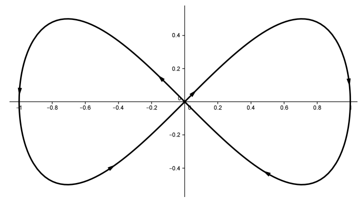

Figura 1: Lemniscata de Bernoulli.

c) La curva representada en la Figura 1 es conocida como lemniscata de Bernoulli. Esta curva admite la parametrización

$$\vec{\gamma}(t) = (sin(t), sin(t)cos(t)), t \in [0, 2\pi]$$

y su ecuación cartesiana es

$$x^4 = x^2 - y^2$$

Calcule el área que encierra la lemniscata.

11. a) Para el campo

$$\vec{F}(\vec{r}) = (2\theta + \sqrt{2+\rho^2})\hat{\rho} + \frac{1}{\rho} e^{\theta^2} \hat{\theta} + (\theta^2 + \log(1+z^2))\hat{z}$$

expresado en coordenadas cilíndricas, calcule $rot(\vec{F})$.

b) Bosqueje la superficie S de ecuación $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq x$, $y \geq 0$.

c) Calcule $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde $\vec{F}$ es el campo en la parte (a) y S la superficie en la parte (b) (∂S está orientada de $(1,0,0)$, a $(0,1,0)$ a $(1,0,1)$).

12. El objetivo de este problema es demostrar el **Teorema de Stokes** a partir del **Teorema de Green**, en el caso particular en que la superficie es el grafo de una función C^2.
Para ello, sean $D \subseteq \mathbb{R}^2$ una región en el plano que satisface las hipótesis del **Teorema de Green** y $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ la superficie definida por el grafo de la función f ($S = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D\}$) y $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial de clase C^1. Demostraremos que:

$$\iint_S rot(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde S y ∂S están orientadas de forma compatible. Para esto se procederá de la siguiente forma:

a) Pruebe que para todo campo $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$ continuo en $\mathbb{R}^3$ se tiene:

$$\iint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iint_D \left(-\frac{\partial f}{\partial x} G_1 - \frac{\partial f}{\partial y} G_2 + G_3 \right) dxdy \tag{1}$$

b) Probar directamente de la definición de integral de trabajo que:

$$\int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial D} \vec{H} \cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{H}$ es el campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ dado por

$$\vec{H}(x, y) = \left(F_1(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x}, F_2(x, y, f(x, y)) + F_3(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

c) Aplique el teorema de Green al campo $\vec{H}$ definido en la parte (b).

d) Aplique la igualdad (1) al campo $\vec{G} = rot(\vec{F})$ y concluya.

Resumen C1

A partir de ahora tomaremos f y $F = (F_1, F_2, F_3)$, campo escalar y vectorial respectivamente, y $\vec{x} = (x_1; x_2; x_3) = \vec{\varphi}(u_1; u_2; u_3) = \vec{\varphi}(\vec{u})$.

1. Factor escalar: $h_i = \left\| \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}(\vec{u}) \right\|$
2. Vector unitario del nuevo sistema ortogonal: $\hat{u}_i := \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u_i}(\vec{u})$
3. Operadores diferenciales:
   a) Gradiente: $\nabla f = grad(f) = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \hat{u_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \hat{u_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \hat{u_3}$
   b) Divergencia: $\nabla \cdot F = div(F) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_2 h_3 F_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 F_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 F_3)}{\partial u_3} \right)$
   c) Laplaciano: $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = div(\nabla f) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial u_3} \right) \right]$
   Nota. Se define $\Delta F = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$
   d) Rotor: $rot(F) = \nabla \times F = \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_2} - \frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_3} \right) \hat{u}_1 - \frac{1}{h_1 h_3} \left(\frac{\partial(h_3 F_3)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_3} \right) \hat{u}_2 + \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial(h_2 F_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial(h_1 F_1)}{\partial u_2} \right) \hat{u}_3$
   $= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{u}_1 & h_2 \hat{u}_2 & h_3 \hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}$
4. Operadores diferenciales cartesianos:
   a) $grad(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{e_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{e_2} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{e_3}$
   b) $div(F) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$
   c) $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
   d) $rot(F) = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \hat{e}_1 - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \hat{e}_3$
5. Coordenadas cilíndricas: $\varphi(\rho, \theta, z) = (\rho cos(\theta), \rho sin(\theta), z)$
   a) $grad(f) = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k}$
   b) $div(F) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
   c) $\Delta f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
   d) $rot(F) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial z} \right) \hat{\rho} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial z} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} \right) \hat{k}$
6. Coordenadas esféricas: $\psi(r, \theta, \varphi) = (r sin(\varphi) cos(\theta), r sin(\varphi) sin(\theta), r cos(\varphi))$
   a) Se calcula de manera similar.
7. Un campo vectorial se dice incomprensible, solenoidal o adivergente cuando su divergencia es nula.
8. Un campo vectorial se dice irrotacional cuando su rotor es nulo.
9. Un campo escalar se dice una función armónica si su laplaciano es nulo.
10. Una curva C dada una función γ, se dirá:
    a) Simple si γ es inyectiva. Es decir, la curva C no se corta a si misma.
    b) Cerrada si $\gamma(x_0) = \gamma(x_f)$, es decir, la curva C parte y termina en el mismo lugar.
    c) Cerrada Simple si la curva solamente se corta en sus extremos.
    d) Regular a trozos si $\gamma'(t)$ es acotada y continua en todo el dominio de γ salvo un número finito de puntos.
11. Sea $\vec{\gamma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ la función que define una curva simple (o cerrada simple) y regular C y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar definido, a lo menos, en $\vec{\gamma}([a, b])$ y tal que $f(\vec{\gamma}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$ sea continuo en $[a, b]$. Se define la **integral de trayectoria** de f a lo largo de C como:
    $$\int_C f dl := \int_a^b f(\gamma(\vec{t})) \left\| \gamma'(\vec{t}) \right\| dt$$

12. Sea $\vec{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ la función que define una curva simple (o cerrada simple) y regular C y sea $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo escalar definido y continuo, a lo menos, en $\vec{\gamma}([a,b])$ y tal que $\vec{F}=F_1(x,y,z)\vec{e}_1+F_2(x,y,z)\vec{e}_2+F_3(x,y,z)\vec{e}_3$. Se define la **integral de línea** de $\vec{f}$ a lo largo de C como laa siguiente integral de trayectoria:

$$\int_C \vec{F}\cdot\vec{dl} := \int_a^b (\vec{F}(\gamma(\vec{t}))\cdot\gamma'(\vec{t}))dt$$

13. Un campo vectorial $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ se dice **conservativo** si proviene de un potencial, i.e., existe un campo escalar f de clase C^1 tal que $\vec{F}=\nabla f$.

   a) Sea $\vec{F}:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial conservativo en Ω. Entonces, si C es una curva que une los puntos $\vec{x}_i$ y $\vec{x}_f$:

   $$\int_C \vec{F}\cdot\vec{dl} = f(\vec{x}_f)-f(\vec{x}_i)$$

   En otras palabras, la integral no depende de la curva en sí, solamente depende del punto de inicio y de fin.

   b) $\vec{F}$ es conservativo en un subconjunto conexo $\iff \forall\Gamma$ cerrada y regular por pedazos se tiene que $\oint_\Gamma \vec{F}\cdot\vec{dl}=0$

   c) Sea $\vec{F}:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1. Entonces $\vec{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\iff rot(\vec{F})=\vec{0}$ en $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$

   d) Sea $\vec{F}:\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1 en Ω un conjunto estrellado. Entonces $\vec{F}$ es conservativo en $\Omega\iff rot(\vec{F})=\vec{\{0\}}$ en Ω

   e) $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ se dice estrellado si existe $\vec{r}_0\in\Omega$ tal que $\forall\vec{r}\in\Omega, \{\lambda\vec{r}_0+(1-\lambda)\vec{r}|\lambda\in[0,1]\}\subseteq\Omega$

14. Dada una superficie S parametrizada en $D\subseteq\mathbb{R}^2$ por $\vec{\varphi}=\vec{\varphi}(u,v)$ y el campo vectorial $\vec{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definido, al menos, sobre S, se define el **flujo** de $\vec{F}$ sobre S como la siguiente integral:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{dS} = \iint_D \vec{F}\cdot\left(\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right)dudv = \iint_D \vec{F}\cdot\hat{n}\left\|\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right\|dudv$$

Donde $\hat{n} := \dfrac{\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}}{\left\|\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\varphi}}{\partial v}\right\|}$ es el vector normal unitario (normal a la superficie).

15. **Teorema de la Divergencia de Gauss.**
Sea $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\vec{F}:U\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** sobre un abierto $U\supseteq\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$. Entonces

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot d\vec{A} = \iiint_\Omega div(\vec{F})\,dV$$

16. **Teorema de Stokes.**
Sea $S\subseteq\mathbb{R}^3$ una superficie **orientable y regular por pedazos**, cuyo borde ∂S es una curva **cerrada, simple y regular por pedazos**. Si $\vec{F}:U\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** definido sobre un abierto $U\supseteq S\cup\partial S$. Sea $\hat{n}:S\to\mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S, de tal manera que ∂S sigue la **regla de la mano derecha** con respecto a $\hat{n}$. Entonces se cumple:

$$\oint_{\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F})\cdot\hat{n}\,dA$$

17. **Teorema de Green en el plano.**
Sea $S\subseteq\mathbb{R}^2$ una **región acotada** tal que su frontera ∂S es una **curva simple, cerrada y regular por pedazos**, orientada en el **sentido antihorario**. Consideremos dos escalares $\boldsymbol{M=M(x,y)}$ y $\boldsymbol{N=N(x,y)}$ **ambos de clase C^1** en un abierto que contiene a $S\cup\partial S$. Entonces

$$\oint_{\partial S} Mdx+Ndy = \iint_S\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy$$

18. **LO MÁS IMPORTANTE.** Al usar un teorema, ***no olvide corroborar si las hipótesis se cumplen.***