MA2002-5 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Rodrigo Lecaros L.
Auxiliares: Corazón Marchant D., Manuel Suil J..
Fecha:16 de Octubre de 2015

Trabajo Dirigido C1

Teoremas

1. **Teorema de la Divergencia de Gauss.**
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un **abierto acotado** cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la **normal exterior**. Sea $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** sobre un abierto $U \supseteq \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces
$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} div(\vec{F})dV$$

2. **Teorema de Stokes.**
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie **orientable y regular por pedazos**, cuyo borde ∂S es una curva **cerrada, simple y regular por pedazos**. Si $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de **clase C^1** definido sobre un abierto $U \supseteq S \cup \partial S$. Sea $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S, de tal manera que ∂S sigue la **regla de la mano derecha** con respecto a $\hat{n}$. Entonces se cumple:
$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, dA$$

3. **Teorema de Green en el plano.**
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ una **región acotada** tal que su frontera ∂S es una **curva simple, cerrada y regular por pedazos**, orientada en el **sentido antihorario**. Consideremos dos escalares $\boldsymbol{M = M(x, y)}$ y $\boldsymbol{N = N(x, y)}$ **ambos de clase C^1** en un abierto que contiene a $S \cup \partial S$. Entonces
$$\oint_{\partial S} Mdx + Ndy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

Problemas

1. Sea S la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 = (z + c(z))^2, z \in [-1, 1]\}$ donde:
$$c(z) = \begin{cases} 1, \text{ si } z \geq 0 \\ \text{-1, si } z < 0 \end{cases}$$

   a) Exprese la ecuación que define S en coordenadas cilíndricas y esboce la superficie.

   b) Use coordenadas cilíndricas para encontrar una parametrización de la superficie y luego encuentre un campo de vectores normales exteriores a esta superficie. Encuentre la expresión de los vectores normales en coordenadas cilíndricas.

   c) Calcule el flujo de $\vec{F} = \rho\hat{\rho}$ a través de la superficie S usando directamente la definición de flujo.

   d) Calcule el flujo sobre la superficie por medio del teorema de la divergencia para un volumen adecuado.

2. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase C^1.

   a) Demuestre que
$$rot\vec{F}(a) \cdot \hat{n} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{C_r} \vec{F} \cdot \vec{dr}$$
   con C_r el círculo de radio r, centro en a, que vive en el plano de normal $\hat{n}$.

b) Use el resultado anterior para calcular $rot\vec{F}(0)$ con $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, x_2)$ (use $\hat{e}_i, i = 1, 2, 3$).

3. Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva definida en coordenadas cilíndricas por $\rho = cos(u), \theta = \theta_0$ fijo y $z = sin(2u)$, donde $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$. Considere la superficie S que se obtiene al rotar Γ alrededor del eje z.

   a) Encuentre una parametrización regular para la superficie S en función de (u, θ).

   b) Usando el Teorema de la Divergencia calcule el volumen de la región encerrada por S.
   Hint: Considere el campo $\vec{F}(x, y, z) = z\hat{k}$.

4. Calcule el área total encerrada por la curva de ecuación $\frac{x^{2/3}}{64} + \frac{y^{2/3}}{8} = 27$.
   Hint: Use el campo $\vec{F} = (0, x)$ y en caso de que lo necesite las siguientes identidades

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta \operatorname{sen}^n \theta \, d\theta = \frac{n-1}{m+n} \int_0^{2\pi} \cos^m \theta \operatorname{sen}^{n-2} \theta \, d\theta, \quad \int_0^{2\pi} \cos^m \theta \, d\theta = \frac{m-1}{m} \int_0^{2\pi} \cos^{m-2} \theta \, d\theta.$$

5. Funciones conservativas:

   a) Sea $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(\Omega)$ y Ω es un conjunto abierto y conexo. Suponiendo que u es armónica en Ω, demuestre que el campo $\vec{F} = -\frac{\partial u}{\partial y}\hat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\jmath}$ es conservativo en Ω y concluya que existe $u : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armónica en Ω tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

   b) Calcule la integral de línea del campo vectorial $\vec{F} = (2xze^y + z, x^2ze^y + 3cos(z), x^2e^y + x - 3ysen(z))$ sobre una curva regular y simple definida subre la superficie de una hiperboloide, y que va desde el punto $(0, 0, \sqrt{3})$ al punto $(2, 3, 3)$.

6. Fórmulas integrales de Green: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado, cuya frontera es $\partial\Omega, f, g \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$:

   a) Pruebe que:

$$\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial n} dA = \iiint_{\Omega} \Delta f dV$$

   b) Obtenga la primera fórmula integral de Green:

$$\iiint_{\Omega} f\Delta g dV = \iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial n} dA - \iiint_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g dV$$

   c) Obtenga la segunda fórmula integral de Green:

$$\iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f) dV = \iint_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) dA$$

   d) Consideremos la ecuación de Laplace con condiciones de tipo Dirichlet.

      1) $\Delta f = u$, en Ω
      2) $f = v$, sobre $\partial\Omega$

   Donde $u : \Omega \to \mathbb{R}$ y $u : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, son funciones continuas y continuamente diferenciable, respectivamente. Pruebe que la ecuación de Laplace tiene solución única.
   Hint: Suponga que existen dos funciones f_1 y f_2, y defina $w = f_1 - f_2$. Pruebe que $w = 0$ en $\Omega \cup \overline{\Omega}$.