

Punto Auxiliar 11

P11

a) Sean $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_{2\pi+a}^{2\pi+b} f(x) dx \quad \text{sea } \begin{cases} u = x - 2\pi \\ du = dx \end{cases}$$

$$= \int_a^b f(u + 2\pi) du = \int_a^b f(u) du$$

↑
periodicidad

Veremos las otras identidades. En primer lugar, sea $g = x + a$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a) dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(g) dg$$

Además,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{-\pi+a} f(x) dx + \int_{-\pi+a}^{\pi} f(x) dx$$

y por otra parte

$$\int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x) dx = \int_{-\pi+a}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{\pi+a} f(x) dx$$

Usando la primera identidad

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi+a+2\pi}^{-\pi+a+2\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{\pi+a} f(x) dx$$

y junto con los ptes anteriores se tiene

b) Se sabe que

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta) \quad \text{para periodicidad } 2\pi.$$

$$\text{donde } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta, \quad n \geq 1$$

$$\text{Luego } \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = f(0)$$

$$\text{Recordando que } \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\text{entonces } a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \left(\frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{in\theta} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

$$= \hat{f}(n) + \hat{f}(-n)$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{i\theta} d\theta - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-i\theta} d\theta \\
 &= i(\hat{f}(n) - \hat{f}(-n))
 \end{aligned}$$

c) Si f es par luego

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta = 0 \quad (\text{pues el integrando es impar})$$

Luego la serie de f es serie de cosenos y

$$\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$$

Si f impar entonces $a_n = 0$ y $\hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = 0$

d) $f(x) = |x|$ es par, luego se expresa en serie de cosenos

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx) dx \quad \begin{array}{l} \text{sea } u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos(nx) dx \Rightarrow v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{array} \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(x \frac{\sin(nx)}{n} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \\
 &= -\frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx \quad \begin{array}{l} \text{sea } u = nx \\ du = n dx \end{array}
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{\pi n} \int_0^{n\pi} \frac{\sin(u)}{n} du$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} \cos(u) \Big|_0^{n\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi n^2} ((-1)^n - 1)$$

Además

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2}$$

Luego la serie de Fourier se escribe como

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2} \cos(nx)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi (2n-1)^2} \cos((2n-1)x)$$

↙ Pues sólo consideramos los n impares ya que en otro caso es cero.

e) Como la serie de Fourier es una fiel copia de la función, si evaluamos en cero:

$$|0| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi (2n-1)^2} \cos(0)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

P21

$$(P) \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \\ u(x, 0) = f(x) \quad (CI) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (CB) \end{cases}$$

Usando separación de variables, tomamos $u(x, t) = \phi(x) \psi(t)$ y reemplazamos

$$i \psi'(t) \phi(x) = \phi''(x) \psi(t) \quad / : \phi(x) \psi(t)$$

$$\frac{i \psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}$$

e imponemos que es igual a una constante $-\lambda$.

Resolviendo el problema espacial:

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\lambda \Rightarrow \phi''(x) + \lambda \phi(x) = 0$$

cuya solución es

$$\phi(x) = A e^{\sqrt{\lambda} x} + B e^{-\sqrt{\lambda} x}$$

Usando las CB sobre x tenemos que

$$\phi(0) = \phi(\pi) = 0$$

$\Rightarrow$

$$\phi(0) = A + B = 0 \Rightarrow A = -B$$

La ED se convierte en

$$\phi(x) = A(e^{\sqrt{\lambda} x} - e^{-\sqrt{\lambda} x})$$

$$\Rightarrow \phi(\pi) = A(e^{\sqrt{\lambda} \pi} - e^{-\sqrt{\lambda} \pi}) = 0$$

No queremos $A=0$ (solución trivial) entonces

$$e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} = 0$$
$$\Rightarrow e^{2\sqrt{-\lambda}\pi} = 1 = e^{2\pi ki} ; k \in \mathbb{N}$$

$$\therefore \sqrt{-\lambda} = ki$$

$$\text{Luego } \lambda = k^2$$

Así la solución de la EDO queda

$$\phi_k(x) = A_k (e^{ikx} - e^{-ikx})$$
$$= A_k \sin(kx)$$

Usando la fórmula compleja de seno y juntando las constantes.

Para la EDO temporal

$$\psi'(t) - i\lambda \psi(t) = 0 \quad \text{donde } \lambda = k^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \psi_k(t) = C_k e^{ik^2 t}$$

Luego la solución de la EDP es

$$u(x, t) = \sum_{k \geq 1} u_k(x, t)$$

$$= \sum_{k \geq 1} \phi_k(x) \psi_k(t)$$

$$= \sum_{k \geq 1} C_k \sin(kx) e^{ik^2 t}$$

juntamos constantes

Usando la condición inicial

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(kx) = f(x)$$

donde los C_k corresponden a los coeficientes de la serie de Fourier de $f(x)$, es decir,

$$C_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

También se puede verificar esto último extendiendo f de forma impar y luego calculando los coeficientes de Fourier, se llega al mismo resultado.