MA2002-5 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Rodrigo Lecaros L.
Auxiliares: Diego Marchant D., Manuel Suil J..
Fecha: 9 de Diciembre de 2015

Auxiliar C3

Problemas

1. Resuelva el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} y_{tt}(x,t) &= y_{xx} - cos(x) \qquad 0 < x < 2\pi \quad t > 0 \\ y_t(x,0) &= 0 \qquad 0 < x < 2\pi \\ y(x,0) &= 0 \qquad 0 < x < 2\pi \\ y(0,t) = y(2\pi,t) &= -1 \qquad t > 0 \end{aligned}$$

   Hint. Considere soluciones del tipo $y(x,t) = Y(x,t) - h(x)$ para una función h adecuada.

2. Sea a un real estríctamente positivo y $\omega_0 = 2\pi/a$. Si f es una función continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ e integrable tal que la serie

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+na)$$

   converja, y tal que la siguiente serie cumple:

$$T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(m\omega_0)| < \infty$$

   Pruebe que:

$$S(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m\omega_0) e^{im\omega_0 t}$$

   Hint. Considere la siguiente forma de una serie de Fourier:

$$s_f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{\frac{i2\pi mt}{L}}.$$

   Donde

$$C_m = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{\frac{-i2\pi mx}{L}} dx$$

3. Muestre que para la función $f(x) = sech\left(\frac{x}{2}\right)$, su transformada de Fourier es $\hat{f}(\xi) = \sqrt{2\pi} sech(\pi\xi)$.
   Indicación: Considere, para el cálculo de integrales, el rectángulo en el plano complejo de altura $2i$, ancho $2R$, cuyo borde inferior esté sobre el eje real y centrado en el origen.