MA2002-05 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Rodrigo Lecaros L.
Auxiliar: Diego Marchant D.- Manuel Suil J.

Auxiliar 9

27 de Noviembre de 2015

1. La EDP con sus condiciones de iniciales y de borde, que modela las vibraciones de una viga estructural simplemente apoyada es

$$(P)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) + e^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t) & = 0 \quad \forall x \in (0,L),\ t>0 \\ u(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) & = 0 \\ u(L,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(L,t) & = 0 \\ u(x,0) & = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) & = g(x) \end{cases}$$

a) Usando el método de separación de variables en la forma $u(x,t) = \phi(x)\psi(t)$, pruebe que para resolver el problema espacial deben encontrarse aquellas constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que la EDO siguiente tenga soluciones no triviales.

$$(P_{vp}) = \begin{cases} \alpha\phi(x) + \phi^{(4)}(x) & = 0 \quad \forall x \in (0,L),\ t>0 \\ \phi(0) = \phi''(0) & = 0 \quad (CB\ en\ x=0) \\ \phi(L) = \phi''(L) & = 0 \quad (CB\ en\ x=L) \end{cases}$$

b) Pruebe que cuando $\alpha = 0$, la única solución del problema (P_{vp}) es $\phi \equiv 0$.

c) Multiplique la EDO del problema (P_{vp}) por $\phi(x)$, integre por partes y utilice las condiciones de borde para probar que toda solución de (P_{vp}) satisface la relación

$$\alpha\int_0^L \phi^2(x)dx + \int_0^L [\phi''(x)]^2 dx = 0$$

d) Use la relación anterior para probar que si $\alpha > 0$ entonces la única solución del problema (P_{vp}) es $\phi(x) \equiv 0$.

e) Según los resultados anteriores, el problema (P_{vp}) tiene soluciones no triviales sólo si $\alpha < 0$. Haga el cambio de variables $\alpha = -a^4$ donde $a > 0$ y resuelva el problema de (P_{vp}).
Indicación: Recuerde que la solución general de la EDO en el problema (P_{vp}) es de la forma

$$\phi(x) = Acosh(ax) + Bsenh(ax) + Ccos(ax) + Dsen(ax)$$

Use las condiciones de borde en $x = 0$ para encontrar A y C. Luego utilice las condiciones de borde en $x = L$ para probar que $B = 0$ y $Dsen(aL) = 0$. Use estos resultados para concluir que la solución es no trivial sólo cuando $a = a_n,\ n \in \mathbb{N}$, donde debe explicitar los a_n y los $\phi_n(x)$ correspondientes.

f) Para cada a_n de la ecuación anterior, resuelva la ecuación temporal y pruebe que la n-ésima solución de la EDP+CB en el problema (P) es de la forma

$$u_n(x,t) = [A_n cos(\omega_n t) + B_n sen(\omega_n t)]sen(a_n x)$$

donde debe explicitar los valores ω_n en términos de a_n y los datos del problema.

g) Indique cuál es la solución del problema (P) si las condiciones iniciales son

$$f(x) = 5sen\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

$$g(x) = -7sen\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

h) Considere el caso general en que $f(x)$ y $g(x)$ se pueden desarrollar en serie de fourier de senos en $[0, L]$. En este caso escriba la solución formal $u(x,t)$ de problema (P) como una serie, escribiendo las fórmulas que permiten calculas los coeficientes A_n y B_n en términos de las funciones f y g.

i) Escriba la solución formal del problema (P) en el caso particular en que $f(x) = x(L-x)$ y $g(x) = 0$. Debe calcular todos los coeficientes.