MA2002-5 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Rodrigo Lecaros L.
Auxiliares: Diego Marchant D., Manuel Suil J..
Fecha: 11 de Noviembre de 2015

Auxiliar Extra C2 #2

1. Determine el disco de convergencia de las siguientes series:

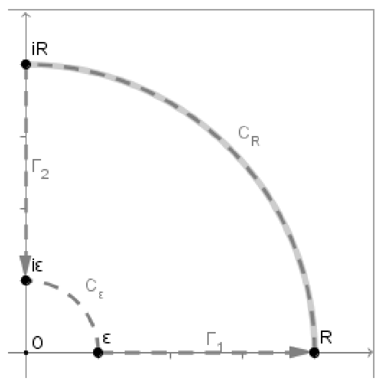
   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n n^3 (n!)^3}{(3n)!} z^{3n}$ *b)* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(3 + (-1)^n\right)^n z^n$

2. La idea del siguiente problema es calcular:

$$\int_0^{\infty} \frac{ln^2(t)}{1-t^2} dt$$

   Para esto, proceda de la siguiente manera:

   a) Sea $f(z) = \frac{ln^2(z)}{1-z^2}$, encuentre sus polos y calcule los residuos asociados a estos. A partir de ahora utilice la siguiente curva (recorrida en sentido antihorario):



   Donde $R >> 1$ y $\epsilon << 1$.

   b) Pruebe que $I_R = \displaystyle\int_{C_R} f(z)dz \to 0$

   c) Pruebe que $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0} \int_{C_\epsilon} f(z)dz = 0$

   d) Calcule las dos integrales restantes y concluya.

3. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua, y definamos $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $h(z) = \displaystyle\int_0^1 f(t) \cos(zt)\, dt$. El objetivo de este problema es demostrar que f es entera, es decir, analítica en todo $\mathbb{C}$. Para ello:

   a) Expanda en series de potencias la función $cos(z)$ en torno al 0.

   b) Pruebe que $\forall z \in \mathbb{C}, h(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^1 t^{2n} f(t)\, dt\right] z^{2n}$

   c) Muestre que $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $\left|\displaystyle\int_0^1 t^{2n} f(t)\, dt\right| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}$. *Hint:* Note que $t^{n+1} \leq t^n$, pues $t \in [0,1]$.

   d) Concluya

msuil@dim.uchile.cl