MA2002-5 Cálculo Avanzado y Aplicaciones.
Profesor: Rodrigo Lecaros L.
Auxiliares: Diego Marchant D., Manuel Suil J..
Fecha:6 de Noviembre de 2015

Auxiliar 6

Problemas

1. Se define la función $log(z) = log|z| + iArg(z)$ con $Arg(z) = [-\pi, \pi]$, como la rama principal del logaritmo complejo, esta función es Holomorfa en $\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$:

   a) Se pide demostrar lo siguiente:

   1) $log'(z) = \frac{1}{z}$.

   2) $log(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k+1}(z-1)^{k+1}$, con $|z-1| < 1$.

   Indicación: note que $\frac{1}{z} = \sum_{k\geq 0}(1-z)^k$, donde $|z-1| < 1$.

   b) Calcule i^i

2. Encuentre el radio de convergencia de las siguientes series:

   a) $\sum_{n\geq 0} \frac{e^{in}}{2n+1}\left(\frac{2}{3i}\right)^n (z+4i)^n$

   b) $\sum_{n\geq 1} n!(z-i)^{n!}$.

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa.

   a) Dado $\theta_0 \in (0, 2\pi)$, pruebe que si

   $$\lim_{R\to+\infty} R\int_0^{\theta_0} \left|f(Re^{i\theta})\right| d\theta = 0 \tag{1}$$

   entonces se tiene

   $$e^{i\theta_0}\int_0^{\infty} f(e^{i\theta_0}x)dx = \int_0^{\infty} f(x)dx \tag{2}$$

   b) Pruebe que $f(z) = exp\left(iz^2\right)$ satisface (1) para todo $\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

   c) Sabiendo que $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calcule el valor de las siguientes integrales impropias:

   $$\int_0^{\infty} cos(x^2)dx, \int_0^{\infty} sin(x^2)dx.$$

   Indicación: $\forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], sen\alpha \geq \frac{2\alpha}{\pi}$.

4. Se define la **serie de Laurent** centrada en $z_0 \in \mathbb{C}$ como la expresión:

   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

   a) Sean R_1 y R_2 tales que $\frac{1}{R_2} = \lim_{k\to\infty} sup|a_k|^{\frac{1}{k}}, R_1 = \lim_{k\to\infty} sup|a_{-k}|^{\frac{1}{k}}$, pruebe que la serie converge $\forall z \in C(z_0; R_1, R_2) := \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$. A este conjunto se le denomina *corona*, la cual cumple que la serie de Laurent converge uniformemente para todo cerrado dentro de ella.

b) Dada una función f holomorfa en la corona $C(z_0; R_1, R_2)$, muestre que existe una serie de Laurent $S(z)$, tal que $f(z) = S(z), \forall z \in C(z_0; R_1, R_2)$. Muestre además que $\forall n \in \mathbb{Z}, a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{z_0,r}} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{k+1}} d\omega$, donde $C_{z_0,r}$ es una circunferencia centrada en z_0 y de radio $r \in (R_1, R_2)$.
Indicación: Use la fórmula de Cauchy.

c) Escriba la serie de Laurent y describa cada corona para los siguientes casos:

1) $f(z) = \frac{1}{z^3}$
2) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$
3) $f(z) = \frac{1}{1-z}$