MA2002-05 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Rodrigo Lecaros L.
Auxiliar: Diego Marchant D.- Manuel Suil J.

"Las matemáticas son la creación más poderosa y bella del espíritu humano." - Stefan Banach

Auxiliar 4: Preparación C1 (parte 1)

9 de Octubre de 2015

1. a) Verifique que
$$\vec{F} = (y^2cos(x) + z^3)\hat{\imath} + (2ysen(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$
es un campo conservativo y encuentre un potencial del cual provenga.

   b) Calcule la integral de línea sobre Γ de $\vec{G}$ donde
$$\vec{G} = (y^2cos(x) + 2z^3)\hat{\imath} + (2ysen(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$
y Γ es una curva que consta del arco $y = x^2$, $z = 0$ desde el origen al punto $(1, 1, 0)$ y de la recta que une los puntos $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

2. Sea $\vec{F}$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Se puede mostrar que $div(rot(\vec{F})) = 0$. Sea Ω una región de $\mathbb{R}^3$ de borde $S := \partial\Omega$, superficie cerrada, regular por trozos. Probar, usando por separado el Teorema de la Divergencia y el Teorema de Stokes, que
$$\iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS = 0$$

3. *a*) Si $\hat{k}$ es el vector unitario según Z y $\hat{r}$ el vector unitario radial de coordenadas esféricas, demuestre que $\hat{k} = cos(\varphi)\hat{r} - sen(\varphi)\hat{\varphi}$ donde φ es el ángulo de caída desde el eje Z hasta $\hat{r}$

   b) Considere el campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por
$$f = \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\hat{k} \cdot \hat{r}}{r^3}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
Calcule $\vec{F} = -\nabla f$, expresándolo en la base $\{\hat{r}, \hat{\varphi}, \hat{\theta}\}$ de las coordenadas esféricas ¿Podría asegurar que el campo es conservativo?

   c) Considere el campo vectorial $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por
$$\vec{A} = \frac{\alpha}{4\pi}\frac{\hat{k} \times \hat{r}}{r^3}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
Calcule $rot(\vec{A})$.

   d) Sea $B(0, \epsilon)$ la esfera en el origen de radio ϵ en $\mathbb{R}^3$. Calcule
$$\iint_{B(0,\epsilon)} \hat{F} \cdot \hat{n} dS$$
donde $\hat{F}$ es el campo encontrado en b).

   e) Calcule
$$\iint_{\Sigma} \hat{F} \cdot \hat{n} dS$$
donde Σ es una superficie regular y cerrada que contiene al origen (Use Teorema de la Divergencia).