MA2002-05 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Rodrigo Lecaros L.
Auxiliar: Diego Marchant D.- Manuel Suil J.

"Usted es muy joven para las matemáticas, apenas consigue utilizarlas" - John Von Neumann

Auxiliar 2

25 de Septiembre de 2015

1. Calcule el área de un paraboloide $z = x^2 + y^2$ comprendido entre los planos $z = 0$ y $z = 1$.

2. Considere el campo

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}\left[(x - y\sqrt{x^2+y^2}arctg(z^2))\hat{i} + (y - x\sqrt{x^2+y^2}arctg(z^2))\hat{j} + (z(x^2+y^2))\hat{k}\right]$$

   a) Escriba $\vec{F}$ en coordenadas cilíndricas.

   b) Calcule $div(\vec{F})$.

   c) Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie de cualquier esfera de radio $R > 0$, orientada según la normal interior a esta, que no intersecte al eje OZ.

3. Sea S la porción de paraboloide de ecuación $z = \rho^2 - 1$ (en cilíndricas) que está delimitada por los planos $z = 0$ y $z = a$ con $a > 0$. Considere el campo vectorial dado por

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + arctg\left(\frac{z^2}{\rho^2}\right)\hat{\theta}$$

   a) Compruebe que la normal exterior está dada por

$$\hat{n} = \frac{2\rho\hat{\rho} - \hat{k}}{\sqrt{1+8\rho^2}}$$

   b) Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de S con la orientación dada por la normal anterior, directamente con la definición de integral de flujo.

   c) Considere el dominio delimitado por S y los planos $z = 0$ y $z = a$ ¿Es posible aplicar el Teorema de la Divergencia a $\vec{F}$ en este dominio?

   d) Utilice el Teorema de la Divergencia en un dominio adecuado para calcular el flujo de $\vec{F}$ a través del manto del cilindro

$$\mathcal{C} = \{x^2 + y^2 = 1,\ 0 < z < a\}$$