



Auxiliar extra 1

P1. (a) Dado $R > 0$, el vector posición en coordenadas toroidales viene dado como:

$$\vec{r}(r, \varphi, \theta) = ((R + r \sin(\varphi)) \cos(\theta), (R + r \sin(\varphi)) \sin(\theta), r \cos(\varphi)), r \in (0, R), \varphi \in [0, 2\pi), \theta \in [0, 2\pi).$$

(i) Calcule los vectores unitarios y factores escalares de las coordenadas toroidales, (**Propuesto** Compruebe que el sistema es ortogonal).

(ii) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ un campo escalar y $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ campo vectorial, ambos de clase C^1 . Calcule ∇f y $\text{div}(\vec{F})$ (**Propuesto.** Calcule $\text{rot}(\vec{F})$.)

(iii) Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, campo escalar donde

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \left| \sqrt{x^2 + y^2} - 8 \right| < 8 \wedge 0 < |z| < 8 - \left| \sqrt{x^2 + y^2} - 8 \right| \right\}$$

y

$$f(x, y, z) = \arctan \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 8}{z} \right).$$

Calcule ∇f .

(b) Calcule el gradiente de

$$f(x, y, z) = \frac{\arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

P2. (a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 . Demuestre que para todo punto $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ y $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$:

$$\text{rot} \int_a^b \varphi(\vec{r}, t) dt = \int_a^b \text{rot} \varphi(\vec{r}, t) dt$$

Ind. Recuerde que si $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función de clase C^1 , $\vec{r} = (x, y, z)$ y u una variable cartesiana, se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial u} \int_a^b \psi(\vec{r}, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} \psi(\vec{r}, t) dt.$$

(b) Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esféricas, donde $r = \|\vec{r}\|$ y $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Verifique que es solenoidal y pruebe que $\forall t > 0, \vec{r} \in \mathbb{R}^3$ se cumple que:

$$\text{rot} \left[\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r} \right] = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d\vec{F}}{dt}(t\vec{r}) \quad (1)$$

(c) Sea ahora $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuamente diferenciable y solenoidal. En tal caso, es posible demostrar que (1) también se satisface para el campo $\vec{F}$ (no se pide demostrarlo). Definamos el campo vectorial

$$\vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 \left[\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r} \right] dt, \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3. \text{ Usando lo anterior, concluya que } \text{rot} \vec{G}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}), \forall \vec{r} \in \mathbb{R}^3.$$

P3. (a) El asteroide es una curva especificada por la ecuación: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ una curva tal que $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ y $z = 2y$, calcule

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

donde $\vec{H} = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2 + y)$.

(b) Considere el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = (2\sin(x+y)\cos(x+y) + e^{x+y^2})\hat{i} + (\sin(2x+2y) + 3z^3 + 2ye^{x+y^2})\hat{j} + (9z^2y + \frac{2}{z} + 2)\hat{k}$$

Encuentre un potencial para $\vec{F}$, es decir, un campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x, y, z) = \vec{F}(x, y, z)$$

Resumen/formulario:

Un sistema de coordenadas curvilíneas es una transformación invertible suficientemente diferenciable $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$. De modo que, $\forall(u, v, w) \in D$

$$\vec{r} = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

- Vectores unitarios: $\hat{u} := \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|}$.
- Factor escalar: $h_u := \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \right\|$
- El sistema $\vec{r}(u, v, w)$ se dice ortogonal si los vectores del triedro $\{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\}$ son mutuamente ortogonales para cada $(u, v, w) \in D$.
- $\nabla f = \frac{1}{h_u} \frac{\partial f}{\partial u} \hat{u} + \frac{1}{h_v} \frac{\partial f}{\partial v} \hat{v} + \frac{1}{h_w} \frac{\partial f}{\partial w} \hat{w}$
- $\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left[\frac{\partial}{\partial u} (F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v} (F_v h_u h_w) + \frac{\partial}{\partial w} (F_w h_u h_v) \right]$. Donde $F_u(u, v, w) = \vec{F}(\vec{r}(u, v, w)) \cdot \hat{u}(u, v, w)$
- $\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w} \begin{vmatrix} h_u \hat{u} & h_v \hat{v} & h_w \hat{w} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} \\ F_u h_u & F_v h_v & F_w h_w \end{vmatrix}$
- En coordenadas cilíndricas, $h_\rho = 1$, $h_\theta = \rho$, $h_z = 1$.
- En coordenadas esféricas, $h_r = 1$, $h_\theta = r \sin(\phi)$, $h_\phi = r$.
- Integral de línea: $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt$
- Un campo vectorial $\vec{F}$ se dice *conservativo* si existe un campo escalar (llamado potencial) f tal que $\vec{F} = \nabla f$.
- Si $\vec{F}$ es conservativa con potencial f , y Γ es una curva parametrizada por $\vec{r} : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^3$, entonces $\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a))$. Vale notar que si la curva es cerrada, la integral sobre esa curva es nula.