MA2002-4: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Héctor Ramírez C.
Auxiliares: Javiera Castillo N., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 13

07 de Diciembre de 2015 (eh! :D)

1. Resumen

Definición 1 (Transformada de Fourier)**.** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una función integrable. Se define su transformada como $\hat{f}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)e^{-iys}dy$

Definición 2 (Convolución)**.** Dadas f, g, integrables, se define el producto de convolución como $f*g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x-y)g(y)dy$.

$f(x)$	$\hat{f}(x)$	$f(x)$	$\hat{f}(x)$
$e^{-x}\quad x\geq 0$ $0\quad x<0$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+is}$	$e^{is_0x}f(x)$	$\hat{f}(s-s_0)$
$e^{-a\|x\|}$, $a>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+s^2}$	$f(x-x_0)$	$e^{-isx_0}\hat{f}(x)$
e^{-ax^2}, $a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{s^2}{4a}}$	$f*g(x)$	$\sqrt{2\pi}\hat{f}(s)\hat{g}(s)$
$\frac{1}{a^2+x^2}$, $a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a}e^{-a\|s\|}$	$f'(x)$	$is\hat{f}(s)$
$-k\quad \|x\|\leq a$ $0\quad \|x\|>a$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}k\frac{\sin(as)}{s}$	$f(x)\cos(w_0x)$	$\frac{1}{2}(\hat{f}(s-w_0)+\hat{f}(s+w_0))$
$g(x)=f(ax)$, $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\hat{g}(s)=\frac{1}{\|a\|}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right)$	$f(x)\sin(w_0x)$	$\frac{1}{2i}(\hat{f}(s+w_0)-\hat{f}(s-w_0))$

2. Problemas

P1. (a) Demuestre que la función $f(x)=\cos(x)$, $x\in(0,\pi)$, admite el siguiente desarrollo en serie: $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\left(\frac{n}{4n^2-1}\right)\sin(2nx)$. **Indicación:** $2\cos(\alpha)\sin(\beta)=\text{sen}(\alpha+\beta)-\text{sen}(\alpha-\beta)$. $2\cos(\alpha)\cos(\beta)=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)$.

(b) Pruebe que $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}=\frac{1}{2^2-1}-\frac{3}{6^2-1}+\frac{5}{10^2-1}-\frac{7}{14^2-1}+\cdots$

P2. Ecuación de Laplace en una banda semi-infinita. Sea $l>0$.

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 & y>0,\ x\in(0,l) \\ u(0,y)=u(l,y)=0 & y>0, \\ u(x,0)=f(x) & x\in(0,l), \\ \lim_{y\to\infty}u(x,y)=0 & x\in(0,l). \end{cases}$$