

MA2002-4: Cálculo Avanzado y Aplicaciones**Profesor:** Héctor Ramírez C.**Auxiliares:** Javiera Castillo N., Sebastián Urzúa B.**Auxiliar 11**

27 de Noviembre de 2015

1. Resumen

Definición 1 (Serie de Fourier). Sea $f : [-l, l] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua por trozos. f admite un desarrollo en serie de Fourier en $[-l, l]$ si existen escalares $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tales que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \forall x \in [-l, l].$$

Y los coeficientes se pueden determinar como:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Para una función par f se tiene que $S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$. Mientras que para una función f impar,

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Corolario 1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es $2l$ -periódica de clase $\mathcal{C}^1$, entonces $f = S_f$ en $\mathbb{R}$ y la convergencia es uniforme.

2. Problemas

P1. Sea $f \in \mathcal{C}^1$, 2π periódica, tal que $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$

(I) Probar la identidad de Parseval, esto es: $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.

(II) Deduzca que $\int_0^{2\pi} f'^2(x) dx = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2$

(III) Pruebe la desigualdad de Wirtinger $\int_0^{2\pi} f'^2(x) dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x) dx$

P2. Considere la región $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$. Resuelva la ecuación de Heilmholtz:

$$\Delta u + u = 0, \text{ en } \Omega$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u(0, y) = 0,$$

$$u(1, y) = 0,$$

$$u(x, 2) = x(1-x), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$