MA2002-4: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Héctor Ramírez C.
Auxiliares: Javiera Castillo N., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 9

12 de Noviembre de 2015

P1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto tal que $0 \in \Omega$, f es holomorfa en Ω, y $R > 0$, tal que $D(\bar{0}, R) \subset \Omega$. Muestre que para cada $z \in D(0,R)$ se satisface la siguiente identidad: $\displaystyle\int_{|\gamma|=R} \frac{f(\xi)\bar{z}}{\xi\bar{z} - R^2} d\xi = 0$. **Hint:** Separe los casos $z = 0,\ z \neq 0$. Deducir que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\gamma|=R} f(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{\bar{z}}{\xi z - R^2} \right) d\xi.$$

P2. (I) Encuentre el radio de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{2n+1} \left(\frac{2}{3i}\right)^n (z + 4i)^n$.

(II) Encuentre la serie de Taylor de $f(z) = z\log(z)$ en torno a $z_0 = i + 1$ y determine su radio de convergencia.

(III) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $f''(z) = 2f(z) + 1$ con $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. Encuentre la serie de potencias de f en torno a 0 y su radio de convergencia.

P3. Pruebe que para todo $k \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{\pi} e^{k\cos(\theta)} \cos(k\sin(\theta)) d\theta = \pi.$$