MA2002-4: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Héctor Ramírez C.
Auxiliares: Javiera Castillo N., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 7

30 de octubre de 2015

1. Resumen

Teorema 1 (Teorema de Cauchy-Goursat). *Si f es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo Ω entonces $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$, para todo camino cerrado regular por trozos y simple Γ contenido en Ω.*

Teorema 2 (Fórmula de Cauchy). *Sea $f : \Omega \subseteq \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $D(\bar{p}, r) \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p, r)$ se tiene $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$.*

Teorema 3 (Desarrollo en serie de Taylor). *Mismas hipótesis de antes. Entonces existe $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ tales que $f(z) = \sum_{k\in\mathcal{N}} c_k(z-p)^k$, $\forall z \in D(p, r)$. Más aún, $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw$.*

2. Problemas

P1. Pruebe que si $f \in H(D(z_0, R))$ entonces para todo $r \in]0, R[$ se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Deduzca que para $0 < \theta < 1$,

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + re^{i\theta}) d\theta = 0.$$

P2. Demuestre que para todo par de enteros $n > k \geq 1$,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz,$$

donde $\Gamma \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ en cualquier camino cerrado y simple que encierra al origen, y que se recorre en sentido antihorario. usando lo anterior, pruebe que $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$.

P3. (a) Pruebe que para $b \in (-1, 1)$, se tiene $\int_0^\infty \frac{1 - b^2 - x^2}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2x^2} dx = \frac{\pi}{2}$. **Indicación:** Integre $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ en un contorno rectangular adecuado.

(b) Si además $b \neq 0$, pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1 - b^2 - x^2)^2 + 4b^2x^2} dx = \frac{1}{4b} \ln \frac{1+b}{1-b}.$$