MA2002-4: Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Héctor Ramírez C.
Auxiliares: Javiera Castillo N., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 3

02 de octubre de 2015

1. Resumen

Teorema 1 (Stokes)**.** $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n} dA.$

Teorema 2 (Teorema de Green en el Plano)**.** $\oint_{\partial S} Mdx + Ndy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy.$

Definición 1 (campo Conservativo)**.** Un campo vectorial $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es conservativo sobre Ω si deriva de un potencial $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en el sentido que $\vec{F} = \nabla g$.

Proposición 1. *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(I) *El campo $\vec{F}$ es conservativo en Ω*

(II) *Para toda curva $\Gamma \subset \Omega$ cerrada y regular por pedazos se tiene*

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0.$$

(III) $\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, *para todo par de curvas regulares $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ con iguales puntos inicial y final.*

2. Problemas

P1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío, $\vec{F}; \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial, y $g : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, ambos de clase $\mathcal{C}^1$. Pruebe que si $S \cup \partial S \subset \Omega$, donde S es una superficie regular a pedazos, entonces se tiene la fórmula de integración

$$\iint_S g(\nabla \times \vec{F}) \cdot D\vec{A} = \oint_{\partial S} g\vec{F} \cdot d\vec{r} - \iint_S \nabla g \times \vec{F} \cdot d\vec{A},$$

siempre que las orientaciones de S y ∂S sean las adecuadas. ¿Qué puede decir cuando además se tiene que $\vec{F}$ es conservativo en Ω?

P2. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria Γ sobre el manto del paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 = -z$ de manera que la altura z y el ángulo θ en cilíndricas cumplen la relación $z(\theta) = e^{-2\theta},\ \theta \geq 0$. considere el campo

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{2xy}{x^2 + y^2} + x\sin(x^2), -\frac{-2xy}{x^2 + y^2} - y^2\cos(y^3), e^x \right).$$

Calcule el trabajo del campo a lo largo de Γ. **Indicación:** $\int_0^\infty e^{-x}\cos(x)dx = \frac{2}{5}$.