

MA2002-4: Cálculo Avanzado y Aplicaciones**Profesor:** Héctor Ramírez C.**Auxiliares:** Javiera Castillo N., Sebastián Urzúa B.**Auxiliar 1**

11 de Septiembre de 2015

P1. Considere la curva Γ que se forma al intersectar las superficies $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + z^2 = 4 + y^2$. Tomar en cuenta sólo la parte de la curva con $z \geq 0$.

- (a) Encuentre una parametrización de Γ (**Sugerencia:** Use coordenadas cilíndricas).
- (b) Calcule la masa suponiendo densidad de masa $\rho(x, y, z) = xy$. Puede usar argumentos de simetría.

P2. Consideremos el sistema de coordenadas dado por

$$\vec{r}(x, \rho, \theta) = (x, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta),$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\rho \geq 0$.

- (a) Determinar el triedro de vectores unitarios $\hat{x}, \hat{\rho}, \hat{\theta}$. Son ortogonales? Calcule $\hat{\theta} \times \hat{x}$ y $\hat{\theta} \times \hat{\rho}$.
- (b) Encuentre expresiones para el gradiente, divergencia, laplaciano y rotor en este sistema de coordenadas.
- (c) Dada una función no negativa y diferenciable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, bosqueje la superficie de ecuación $y^2 + z^2 = f(x)^2$. Verifique que una parametrización de esta superficie es $\vec{r}_1(x, \theta) = x\hat{i} + f(x)\hat{\rho}$.

P3. (a) Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Demuestre que

$$\text{rot} \int_a^b \varphi(\vec{r}, t) dt = \int_a^b \text{rot} \varphi(\vec{r}, t) dt.$$

Indicación: Puede usar la regla de Leibnitz: $\frac{\partial}{\partial u} \int_a^b \varphi(\vec{r}, t) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial u} \varphi(\vec{r}, t)$, con $\vec{r} = (x, y, z)$ y u representa cualquier variable cartesiana.

- (b) Considere el campo vectorial $\vec{F}(\vec{r}) = g(r)\hat{\theta}$ expresado en coordenadas esféricas, donde $r = \|\vec{r}\|$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar. Verifique que $\text{div} \vec{F} = 0$ y pruebe que

$$\text{rot}(\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}) = 2t\vec{F}(t\vec{r}) + t^2 \frac{d}{dt} \vec{F}(t\vec{r}).$$

- (c) Sea ahora $\vec{F}$ un campo cualquiera tal que $\text{div} \vec{F} = 0$ en una bola B de $\mathbb{R}^3$ centrada en el origen. Entonces se puede probar (no se pide que lo haga) que la identidad anterior es válida en B . Definamos el campo vectorial $\vec{G}(\vec{r}) = \int_0^1 (\vec{F}(t\vec{r}) \times t\vec{r}) dt$. Usando lo anterior concluya que $\text{rot} \vec{G} = \vec{F}$.