Pauta Problema 2 (Alg. Lineal 2)

i) Para probar que $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ es base de $\mathbb{R}^4$

bastará verificar que el conjunto B es l. i.

En efecto, sean $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tales que

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\alpha+\beta+\gamma+\delta&=0\\ \beta+\gamma+\delta&=0\\ \gamma+\delta&=0\\ \delta&=0\end{aligned}\right\}\xRightarrow[\text{inmediato}]{}\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$$

Con lo que se concluye que B es base de $\mathbb{R}^4$ $\longrightarrow$ 0.5

ii) Por hipótesis $Ker(T)=Im(T)$ y $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$

Por demostrar que una base de $Ker(T)$ es $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Por TNI $\dim Im(T)+\dim Ker(T)=\dim(\mathbb{R}^4)=4$

y como $Ker(T)=Im(T)\Rightarrow\dim Ker(T)=\dim Im(T)$

Sigue que $2\dim Ker(T)=4\Rightarrow\dim Ker(T)=2$, entonces

una base de $Ker(T)$ debe contener dos vectores l. i. $\longrightarrow$ 0.8

Además, por hipótesis, $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq Im(T)=Ker(T)$, en consecuencia

bastará probar que ese conjunto es l. i. para constituir una base de $Ker(T)$!

Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$; $\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{aligned}\alpha+\beta&=0\\ \alpha+\beta&=0\\ \alpha+\beta&=0\\ \beta&=0\end{aligned}\Rightarrow\alpha=\beta=0$

Concluyéndose que $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ es base de $Ker(T)$ $\longrightarrow$ 0.7

iii) Calcular la matriz representante de T cuando se escoge B como base en la partida y en la llegada

Calculamos la acción de T sobre la base $B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

Por hipótesis $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ y $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \subseteq Ker(T) = Im(T)$

Se sigue que $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ 1.0

Las coordenadas de cada imagen con respecto a la base de llegada B serán:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = 0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Así, $M_{BB}(T) = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ 1.0

IV) Calcular la matriz representante de T cuando se escoge la base canónica en la partida y en la llegada.

Calculamos ahora la acción de T sobre $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$$T(e_1) = T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = 1e_1 + 1\cdot e_2 + 1e_3 + 0e_4$$

$$T(e_2) = T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 1\cdot e_4$$

$$T(e_3) = T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = (-1)e_1 + (-1)e_2 + (-1)e_3 + (-1)e_4$$

$$T(e_4) = T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = T\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3 + 0\cdot e_4$$

$\longrightarrow$ 1.5

Así, considerando las coordenadas de las imágenes en términos de la base de llegada, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ se tiene:

$$M_{B_4 B_4}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

B_4 es la base canónica en $\mathbb{R}^4$

$\longrightarrow$ 0.5

OBS: También puede construirse $M_{B_4 B_4}(T)$ usando matrices de pasaje (o de cambio de bases)