

MA1002-7 Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Héctor Olivero**Auxiliar:** Felipe Olivares, Sebastián Urzúa fcfm.pdf*“Don’t lose your way”***Trabajo Dirigido Exámen**

17 de Diciembre de 2015

- P1. Sea f una función tres veces derivable tal que $f(x) = \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt$. Muestre que $f^{(3)}(x) = 2f(x)$
- P2. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, dos veces diferenciable tal que $\max\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = f(1)$. Se define $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\int_1^{x^2} f(t) dt}{\int_1^x f(t) dt} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- (a) Demuestre que g es continua en todo $\mathbb{R} - \{1\}$.
- (b) Determine el valor de a para que g sea continua en $x = 1$.
- P3. Analice la convergencia de las siguientes integrales:
- (a) $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$
- (b) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$
- (c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sin(x)} dx$
- (d) $\int_0^{\infty} e^{-x} \frac{\sin(x)}{x} dx$. HINT: Estudie convergencia absoluta.
- P4. Determine para que valores del parámetro $\alpha \in \mathbb{R}$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{n\alpha}}$$

converge.

- P5. Sea g una función continua en $\mathbb{R}$. Se considera la función f definida por

$$f(x) = \int_0^x \sin(t) g(x-t) dt, \forall x \in \mathbb{R}$$

Utilice el cambio de variable $u = x - t$ para probar que f admite segunda derivada en $\mathbb{R}$ y que se satisface la relación $f'' + f = g$

P6. Sea $P(a,b)$ un punto del primer cuadrante sobre la curva C de ecuación $xy = x - y$. Considere las regiones R_1 limitada por C , el eje OX y la recta $x = a$, y R_2 limitada por C , el eje OY y la recta $y = b$. Pruebe que el volumen del sólido que se obtiene al rotar R_1 en torno a OX es igual al volumen del sólido que se obtiene al rotar R_2 en torno al eje OY .

P7. El desarrollo en serie para cierta función f es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}.$$

(i) Encuentre el radio e intervalo de convergencia de la serie (analice los extremos).

(ii) Determine la serie que representa $f'(x)$ y preséntela como función conocida (serie geométrica).

(iii) Determine, por integración, $f(x)$, calculando el valor de la constante de integración usando un valor adecuado de x .

(iv) Aproveche (iii) para calcular el valor de la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

P8. Sean $f, g : [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ con $g'(x) > 0$, $t \geq 1$. Considere la siguiente parametrización de una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$:

$$r(t) = (f(t)\cos(g(t)), f(t)\sin(g(t)), f(t)).$$

(a) Demostrar que $\|r'(t)\| = \sqrt{2(f'(t))^2 + f^2(g'(t))^2}$.

(b) Para $f(t) = \frac{1}{t}$ y $g(t) = t$, determinar si la longitud de Γ es convergente.

(c) Para $f(t) = t$ y $g(t) = \sqrt{2}\ln(t)$ calcular $T(t), N(t), \kappa(t)$.

(d) Para $f(t) = 1$, calcular el vector binomial B y la torsión τ .