

MA1002-7 Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Hector Olivero.**Auxiliar:** Felipe olivares, Sebastián Urzúa B.**Auxiliar 13**

04 de Diciembre de 2015

1. Resumen

Definición 1 (Velocidad, rapidez, vector tangente). Consideremos $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de una curva simple Γ , y $\vec{\sigma}(s)$ su parametrización natural. Definamos el vector velocidad, la rapidez y el vector tangente respectivamente como:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t), \quad v(t) = \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| = \frac{ds}{dt}(t), \quad T(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}(t)}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\|}, \text{ donde } s : [a, b] \rightarrow [0, L(\Gamma)] \text{ representa la}$$

función de longitud de arco.

	En longitud de arco s	Parámetro t cualquiera
Vector tangente	$T(s) = \frac{d\vec{\sigma}}{ds}(s)$	$T(t) = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}(t)}{\left\ \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\ }$
Vector Normal	$N(s) = \frac{\frac{dT}{ds}(s)}{\left\ \frac{dT}{ds}(s) \right\ }$	$N(t) = \frac{\frac{dT}{dt}(t)}{\left\ \frac{dT}{dt}(t) \right\ }$
Curvatura	$\kappa(s) = \left\ \frac{dT}{ds}(s) \right\ $	$\kappa(t) = \frac{\left\ \frac{dT}{dt}(t) \right\ }{\left\ \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\ }$
Radio de Curvatura	$R(s) = \frac{1}{\kappa(s)}$	$R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$
Vector Binormal	$B = T \times N$	$B = T \times N$
Torsión	$\tau(s) = -N(s) \cdot \frac{dB}{ds}(s).$	$\kappa(t) = -N(t) \cdot \left(\frac{\frac{dB}{dt}(t)}{\left\ \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\ } \right)$

Teorema 1 (Fórmulas de Frenet).

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N, \quad (1)$$

$$\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B, \quad (2)$$

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N. \quad (3)$$

Proposición 1. Una curva con curvatura nula es una recta. Además, una curva sin torsión es una curva plana.

Definición 2 (Integral de una función sobre una curva). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en $\Omega \subseteq \Gamma$. Se define la integral de f sobre la curva Γ mediante:

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left\| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right\| dt$$

2. Problemas

- P1.** Sea una función $g : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, tal que para $t \geq 0$, $g'(t) > 0$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = M > 0$. Considere la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $r(t) = (\cos(g(t)), \sin(g(t)), 1)$.
- (i) Encuentre el largo total de la curva Γ y la parametrización natural.
 - (ii) Encuentre los vectores $T(t)$, $N(t)$ y $B(t)$.
 - (iii) Encuentre $\kappa(t)$ y $\tau(t)$.
- P2.** Sea $r(s)$ la parametrización natural de una curva Γ . Demuestre que $\frac{dr}{ds} \left(\frac{d^2r}{ds^2} \times \frac{d^3r}{ds^3} \right) = \tau \kappa^2$.
- P3.** Encuentre la masa total del alambre parametrizado por $r(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t))$, con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, cuya densidad de masa está dada por $\rho(x, y, z) = yz$.