

MA1002-7 Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Héctor Olivero**Auxiliar:** Felipe Olivares, Sebastián Urzúa fcfm.pdf*“Never gonna give you up, never gonna let you down”* - Rick Astley**Guía C1**

7 de Octubre de 2015

P1. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, con un único mínimo global en $x = x_0$ y tal que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión con la siguiente propiedad:

$$f(x_n) \leq f(x_0) + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

(a) Pruebe que si $(x_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente a $l \in \mathbb{R}$, entonces necesariamente $l = x_0$

(b) Pruebe que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene alguna subsucesión convergente a x_0 .

Indicación: Pruebe la existencia de alguna subsucesión convergente de x_n por contradicción (a priori podría no tener ninguna) y utilice la parte a).

P2. Sea f la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin((1-a)x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ b(x-a)^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{\sin(a(x-1))}{\ln(x)} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) ¿Para que valores de x esta función es continua, independiente de los valores de a y b ?

(b) Ecuentre los valores de a y b para los cuáles la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

P3. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[0, 1]$ con $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$. Para $a \in \mathbb{N}$, se define $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) + a(1 - 2x)$. Determine todos los valores de a que garanticen que $g(x)$ tendrá al menos un cero en $[0, 1]$.

P4. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Encuentre el valor de α que asegure que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$.

(b) Reemplazando el valor de α encontrado en la parte anterior, encuentre el valor de $f'(0)$ si es que existe.

P5. Considere la función $f(x) = (1+x)e^{\frac{1}{x}}$.

- Determine dominio, signos y ceros.
- Determine continuidad y de ser posible repárela en los puntos en que no sea continua.
- Determine asíntotas de todo tipo si es que hay.
- Calcule $f'(x)$ y estudie crecimiento, máximos y mínimos.
- Calcule $f''(x)$ y estudie convexidades, concavidades y puntos de inflexión.
- Grafique indicando puntos importantes. Determine el recorrido de $f(x)$.

P6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable de segunda derivada continua y con $f(0) = 0$. Se define $g(x)$ mediante:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Demuestre que $g(x)$ es una función continua, derivable y de derivada continua en todo $\mathbb{R}$.

P7. Use la regla de L'Hopital dos veces para que si $f''(x)$ existe $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$ y f'' es continua en x_0 , entonces

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \delta) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} = f''(x)$$

P8. Calcule los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(\frac{x^2-1}{x^2+1})}{x-1}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\sin(x)}{x})^{\frac{1}{x^2}}$.

P9. Considere la caja de base cuadrado de lado a y altura h . Un insecto está localizado en el vértice A y debe llegar a B caminando en línea recta desde A hasta P y de igual forma de desplazarse desde P hasta B.

Determine la posición del punto P de manera de minimizar la distancia total recorrida.

