MA1002-7 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Héctor Olivero Q.
Auxiliar: Felipe Olivares F., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 2

25 de Septiembre de 2015

1. Resumen

Teorema 1 (Caracterización $\varepsilon - \delta$)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in A$. f es continua en $\bar{x}$ ssi se cumple que:*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A,\ |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon.$$

Teorema 2 (Teorema de Weierstrass)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.*

Definición 1. $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice **uniformemente continua** si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall x, y \in A,\ |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Teorema 3. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua ssi ella es continua $\forall x \in A$.*

2. Problemas

P1. El objetivo de esta pregunta es probar que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq |x|$, alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ (es decir, $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(a) \leq f(x)$). Para ello considere $y_0 = f(0)$ y el intervalo $I = [-y_0, y_0]$.

(I) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus I,\ f(x) > y_0$.

(II) Concluya que f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ en un punto de I.

P2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades:

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$
- f es continua en 0.

Demuestre que:

(I) f es uniformemente continua

(II) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot f(1)$.

P3. (I) Demuestre que la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & 0 < x \leq 1, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

es uniformemente continua.

(II) Demuestre que la función $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ no es uniformemente continua.

P4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua.

(I) Pruebe que existen $\bar{x},\ \underline{x} \in [a, b]$ tales que $f(\underline{x}) \leq \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\bar{x}),\ \forall x_1, x_2 \in [a, b]$.

(II) Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualesquiera, existe $\beta \in [a, b]$ tal que $f(\beta) = \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.