MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Juan Dávila B.
Auxiliar : Diego García S.

Auxiliar 12: Repaso control 3

04 de Diciembre de 2015

1. Problemas

1. (**P2-(a) C3 Primavera 2013 modificada**). Una partícula recorre la curva Γ parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = (3\sin t, 4t, 3\cos t); \quad t \in [0, \infty)$$

   a) Haga un gráfico lo suficientemente claro de esta curva.
   b) Determine el instante t_0 en que la partícula ha recorrido una distancia $s = 10\pi$ sobre Γ e indique el punto de la curva en el cual se encuentra en ese instante.
   c) Deduzca la parametrización en longitud de arco s para Γ.
   d) Calcule $T(s), N(s), \kappa(s), \ \forall s \geq 0$
   e) Considere que esta curva posee una densidad variable en el espacio dada por $\rho(x, y, z) = ye^{-y^2}$. Calule la masa de esta curva.

2. Muestre la convergencia o divergencia de las integrales impropias:

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{1/2} + x^{3/2}} dx$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x}{x} dx$$

3. Sea Γ una curva regular simple parametrizada por $r(t)$.

   a) Pruebe que

$$\frac{dr}{dt} = T\frac{ds}{dt} \quad y \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \kappa N(\frac{ds}{dt})^2 + T\frac{d^2s}{dt^2}$$

   b) Calcule $\frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2}$ y concluya que:

$$\kappa(t) = \frac{\| \frac{dr}{dt} \times \frac{d^2r}{dt^2} \|}{\| \frac{dr}{dt} \|^3}$$

4. Dados $a, b, c > 0$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$, sea $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por $r : [0, 2\pi c] \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\vec{r}(t) = (a\cos\frac{t}{c}, a\sin\frac{t}{c}, b\frac{t}{c})$$

   a) Muestre que el parámetro t es la longitud de arco sobre γ.
   b) Pruebe que $T(s)$, vectores tangentes a γ, forman un ángulo constante con el vector $(0, 0, 1)$ y que $N(s)$, vectores normales a γ, son ortogonales con el vector $(0, 0, 1)$.

5. Calcule el centro de gravedad de la porción en el primer cuadrante de la campana de Gauss. Puede usar que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$