MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Juan Dávila B.
Auxiliar : Diego García S.

Auxiliar extra 5: Repaso control 3

01 de Diciembre de 2015

1. Problemas

1. Considere la curva Γ parametrizada por

$$r(t) = (e^{-t}\operatorname{sen} t, e^{-t}\cos t, e^{-t}), \quad t \in [0, \infty)$$

Muestre que Γ es una curva regular, calcule los vectores T, N, B que le corresponden y además calcule $\kappa(t)$ y $\tau(t)$ en cualquier punto de Γ.

2. *a*) Demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{1/2} + x^2} dx$$

es absolutamente convergente.

b) Dada la integral

$$\int_0^1 Ln(\frac{1}{1-x})dx$$

identifique su especie y calcúlela usando la definición. Decida si converge.

3. Sea f continua y acotada en $(0, \infty)$

a) Mostrar que $\int_0^\infty \frac{f(x)}{1+x^2} dx$ converge

b) Mostrar que $\int_0^\infty \frac{f(1/x)}{1+x^2} dx$ converge y su valor es igual a la integral impropia de la parte anterior.

c) Calcular

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^n)} \quad y \quad \int_0^\infty \frac{x^n}{(1+x^2)(1+x^n)} dx$$

4. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = (\int_0^t h(u)du, \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{t^2} h(u)du, \frac{1}{3} \int_0^{t^3} h(u)du), \quad t \in [0, \infty)$$

Muestre que si $\lim_{t\to\infty} t^{3/2}h(t) = M \neq 0$, el largo de Γ es finito.

5. Sea

$$I_n = \int_1^\infty \frac{(Lnx)^n}{x^2} dx$$

Demuestre que $(n+1)I_n = I_{n+1}$ para cada entero positivo $n \geq 0$. Concluya que $I_n = n!$ si n es un entero positivo.

6. Demuestre que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1+x}{1+x^2} dx$$

diverge, pero que

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t \frac{1+x}{1+x^2} dx = \pi$$

7. Sea f la función definida sobre el intervalo $[a, \infty)$, $a > 0$, acotada y con derivada continua. Demuestre que la integral

$$\int_a^\infty \frac{f'(x)}{x^\alpha} dx$$

existe si $\alpha > 0$.