

MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor : Juan Dávila B.

Auxiliar : Diego García S.



Auxiliar extra $\int_0^{Ln(5)} e^x dx$: curvas en el espacio

27 de Noviembre de 2015

1. Problemas

- Demuestre que la curva en $\mathbb{R}^3$ de parametrización $\vec{r}(t) = (\sin^2(t), \sin(t)\cos(t), \cos(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$ pasa dos veces por el punto $(1, 0, 0)$. Demuestre que las dos tangentes en ese punto son perpendiculares entre sí.
- (P3-(a) C3 Primavera 2014). Sea la función $g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, con $g'(t) > 0$, $\forall t \geq 1$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = M \in \mathbb{R}^+$. Considere la parametrización de la curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\vec{r} = (\cos g(t), \sin g(t), 1)$$

- Encuentre el largo total de Γ y los vectores T, N, B .
 - Calcule la curvatura $\kappa(t)$ y la torsión $\tau(t)$, $\forall t \in [1, \infty)$.
- La semana pasada estudiamos el asteroide con parametrización $\vec{r}(t) = (a\cos^3(t), a\sin^3(t), 0)$, con $a > 0$ y $t \in [0, 2\pi]$. Calcule el vector tangente, normal y binormal, la curvatura y la torsión a la curva en los puntos donde tenga sentido. Justifique brevemente en cuáles puntos estas nociones están bien definidas.
 - Demuestre que una curva sin torsión es una curva plana.
 - Calcule el largo L y la masa M de $\vec{r}(t) = (t\sin(t), t\cos(t), \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2})$, $t \in [0, 2\pi]$ cuya densidad está dada por $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.
 - Una partícula describe una trayectoria Γ sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$, de tal forma que su altura z y el ángulo θ en coordenadas cilíndricas cumplen que $z = e^{-\theta}$, $\theta \in [0, \infty)$.
 - Encuentre una parametrización y dibuje la curva.
 - Calcule el largo de Γ .
 - Encuentre la parametrización natural de Γ .

2. Problemas propuestos

- Para la curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = \left(t - \frac{t^3}{3}, t^2, t + \frac{t^3}{3}\right).$$

Encuentre: tangente, curvatura, normal, binormal y torsión.