MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Juan Dávila B.
Auxiliar : Diego García S.

Resumen control 3

1. Rectificación:
$$L_a^b(f) = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

2. Superficie del manto de un sólido de revolución:
$$S_a^b(f) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$$

3. coordenadas polares, expresión del área y largo en polares con $r = f(\phi)$:
$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi$$
$$A = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(\phi)d\phi$$
$$L = \int_a^b \sqrt{f^2(\phi)+f'^2(\phi)}d\phi$$

4. Centro de gravedad de una área plana acotada por $f(x)$ y $g(x)$ con $f(x) > g(x)$ en el intervalo de integración:
$$X_G = \frac{\int_a^b x(f(x)-g(x))dx}{\int_a^b f(x)-g(x)dx} \qquad Y_G = \frac{\int_a^b (f^2(x)-g^2(x))/2dx}{\int_a^b f(x)-g(x)dx}$$

5. Definición de curva: Diremos que un conjunto $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una función continua $\vec{r} : I = [a,b] \to \mathbb{R}^n$, llamada parametrización de la curva, tal que
$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a,b]\}$$

6. Algunas definiciones, diremos que una curva Γ es:
   a) Suave: si admite una parametrización de clase C^1.
   b) : Regular: si admite una parametrización $\vec{r}()$ de clase C^1 tal que $||\frac{d\vec{r}}{dt}(t)|| > 0$ para todo $t \in I$.
   c) Simple: si admite una parametrización de clase C^1 que sea inyectiva (es decir, no hay puntos múltiples).
   d) Cerrada: si admite una parametrización $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.
   e) Cerrada simple: si admite una parametrización $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ y que sea inyectiva sobre [a,b).

7. Parametrizaciones equivalentes: Dos parametrizaciones $\vec{r}_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ y $\vec{r}_2 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ de una misma curva Γ se dicen equivalentes si existe una función biyectiva $\theta : [a,b] \to [c,d]$ de clase C^1 tal que $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\theta(t))$ para todo $t \in [a,b]$. En este caso la función θ se llamará reparametrización.

8. Longitud de una curva. Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ. Definimos la longitud de Γ mediante
$$L(\Gamma) := \int_a^b ||\frac{d\vec{r}}{dt}||dt$$
   El valor de esta integral no depende de la parametrización regular $\vec{r}$ que se escoja para describir Γ, y por lo tanto el largo de Γ está bien definido.

9. Consideremos $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de una curva simple Γ. Definimos el vector velocidad, la rapidez y el vector tangente respectivamente, mediante:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t), \qquad v(t) = ||\frac{d\vec{r}}{dt}(t)|| = \frac{ds}{dt}(t), \qquad T(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)/||\frac{d\vec{r}}{dt}(t)||$$

donde $s : [a, b] \to [0, L(\Gamma)]$ representa la función de longitud de arco.

10. Definición de curvatura, radio de curvatura y vector normal:

$$\kappa(t) := ||\frac{dT}{dt}(t)||/\frac{ds}{dt}(t), \qquad R(s) := \frac{1}{\kappa(s)}, \qquad N(s) = \frac{dT}{dt}/||\frac{dT}{dt}||$$

11. Vector binormal y torsión (en $\mathbb{R}^3$):

$$B = T \times N \qquad \tau(t) = -N(t) \cdot (\frac{dB}{dt}(t)/\frac{ds}{dt}(t))$$

12. Por sus propias definiciones las siguientes relaciones se satisfacen:

$$\frac{dT}{ds} = \kappa N$$
$$\frac{dN}{ds} = -\kappa T + \tau B$$
$$\frac{dB}{ds} = -\tau N$$

Estas fórmulas se conocen como las fórmulas de Frenet

13. Integrales sobre curvas: Sea Γ una curva simple y regular en $\mathbb{R}^n$, y sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua definida en Γ. Definimos la integral de f sobre la curva Γ mediante:

$$\int_\Gamma f dl := \int_a^b f(\vec{r}(t))||\frac{d\vec{r}}{dt}(t)||dt$$

Donde $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización regular de Γ.

14. Definición integral impropia de primera especie: Sea $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ diremos que f es integrable en $[a, \infty)$ si se cumple que:

   a) $\forall x \in (a, \infty)$, f es integrable en $[a, x]$ y además
   b) Existe el límite definido por
   $$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f$$

15. Definición integral impropia de segunda especie: Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ una función no acotada, diremos que f es integrable en $[a, b)$ ssi:

   a) $\forall x \in (a, b)$ f es integrable en $[a, x]$
   b) Existe el límite definido por:
   $$\lim_{x \to b^-} \int_a^x f$$

16. Criterio de comparación: Sean f y g funciones continuas en $[a,\infty)$ tales que:

$$(\exists b \geq a)(\forall x \geq b) \;\; 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

entonces:

$$Si \;\; \int_a^{\infty} g \;\; converge \;\; entonces \int_a^{\infty} f \;\; converge.$$

$$Si \;\; \int_a^{\infty} f \;\; diverge \;\; entonces \int_a^{\infty} g \;\; diverge.$$

17. Criterio del cuociente de funciones: Sean f y g funciones continuas en $[a,\infty)$ y no negativas en $[b,\infty)$ donde $b \geq a$ y tales que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$$

Entonces las integrales impropias

$$\int_a^{\infty} f \;\; y \;\; \int_a^{\infty} g$$

Son ambas convergentes o ambas divergentes.

18. Nota: Los dos criterios anteriores pueden generalizarse fácilmente para el caso de integrales impropias de segunda especie y casos donde el límite inferior es $-\infty$.

19. Convergencia absoluta: Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, diremos que $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ es absolutamente convergente si $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge.

20. Teorema: Sea $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$, se tiene que

$$\int_a^{+\infty} f \;\; converge \;\; absolutamente \implies \int_a^{+\infty} f \;\; converge.$$