

MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor : Juan Dávila B.

Auxiliar : Diego García S.



Auxiliar $1 + \int_4^5 2x dx$: Curvas en el espacio

20 de Noviembre de 2015

1. Resumen

- Definición de curva: Diremos que un conjunto $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ es una curva si existe una función continua $\vec{r} : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, llamada parametrización de la curva, tal que

$$\Gamma = \{\vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$$

- Parametrizaciones equivalentes: Dos parametrizaciones $\vec{r}_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\vec{r}_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de una misma curva Γ se dicen equivalentes si existe una función biyectiva $\theta : [a, b] \rightarrow [c, d]$ de clase C^1 tal que $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(\theta(t))$ para todo $t \in [a, b]$. En este caso la función θ se llamará reparametrización.
- Longitud de una curva. Sea Γ una curva simple y regular. Sea $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización regular de Γ . Definimos la longitud de Γ mediante

$$L(\Gamma) := \int_a^b \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$$

El valor de esta integral no depende de la parametrización regular $\vec{r}$ que se escoja para describir Γ , y por lo tanto el largo de Γ está bien definido.

2. Problemas

- El astroide se define por la ecuación:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

Donde (x, y) son las coordenadas cartesianas usuales. Encuentre una parametrización ('cómoda') para esta curva y calcule con esta el largo total del astroide.

- Considere la curva definida por la siguiente parametrización:

$$\vec{r}(t) = (a \cos 2\pi t, a \sin 2\pi t, ht) \quad t \in [0, 1]$$

Donde a y h son números reales positivos cualesquiera. Grafique esta curva y luego calcule la longitud de la porción de esta contenida en el primer octante.

- Sea Γ la curva parametrizada por $\vec{r} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\vec{r}(t) = (\cos t, \ln(Tg(t) + Sec(t)))$. Calcule $\vec{r}(t)'$ y muestre que $\vec{r}(t)$ es regular salvo en $t = \frac{\pi}{2}$.
- Sea Γ una curva simple y regular. $\sigma(s)$ su parametrización natural. Demuestre que $\sigma(s)' \cdot \sigma(s)'' = 0 \quad \forall s \in (0, L)$.
- Considere la curva definida (en polares) como $r = e^{\theta/2}$ donde $0 \leq \theta \leq 4\pi$. Encuentre la longitud de arco de esta curva.

3. Problemas propuestos

- Encuentre la longitud de arco total de la epitrocoide $x = 8 \cos t - 5 \cos 4t, y = 8 \sin t - 5 \sin 4t$