MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Juan Dávila B.
Auxiliar : Diego García S.

Auxiliar 8: Repaso control 2

6 de Noviembre de 2015

1. Problemas

1. Se define
$$I_n(x) = \int_0^x y^n (y^2+a^2)^{-\frac{1}{2}} dy$$
Demuestre que:
$$(n+2)I_{n+2}(x) = x^{n+1}\sqrt{x^2+a^2} - (n+1)a^2 I_n(x), \quad n \geq 0$$

2. La base de cierto sólido es la región en el plano xy limitado por las parábolas $y = x^2$ y $x = y^2$. Encuentre el volumen de este sólido si cada sección transversal perpendicular al eje x es un cuadrado con su base en el plano xy.

3. Demuestre que la función
$$f(x) := \frac{\int_{-1}^{1+x^2} Sin(Sin(u))du}{x\int_0^x arcTg(e^t)dt}$$
se puede definir continua en $x = 0$.

4. Demuestre que $\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx$ existe mostrando que la sumas superiores e inferiores convergen a un mismo valor. ¿Puede Usted generalizar este método para demostrar la convergencia para un intervalo (a, b) con $0 < a < b$?.

5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y acotada inferiormente por una constante $c > 0$. Para demostrar que $\frac{1}{f}$ es integrable, se pide lo siguiente:

   a) Si S y s denotan las sumas superiores e inferiores respectivamente, pruebe que para toda partición P del intervalo $[a, b]$ se cumple:
   $$S(\frac{1}{f}, P) - s(\frac{1}{f}, P) \leq \frac{1}{c^2}[S(f, P) - s(f, P)]$$

   b) Use el resutado anterior para demostrar que la función $\frac{1}{f}$ es integrable en $[a, b]$.

6. Considere la suma:
$$S_n = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{(3n+2k)^p}{n^{p+1}} \quad p \in \mathbb{N}$$
Calcule $\lim_{n\to\infty} S_n$