MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Juan Dávila B.
Auxiliar : Diego García S.

Resumen control 2

1. Definición: Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $Int(I)$, se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si:
$$\forall x \in Int(I), \quad F'(x) = f(x)$$

2. Teorema (Cambio de variable): Si $u = g(x)$, entonces:
$$\int f(u)du = \int (fog)(x)\ g'(x)dx$$

3. Fórmula de integración por partes: Sean u y v dos funciones de x, entonces:
$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$
o, más compactamente:
$$\int udv = uv - \int vdu$$

4. Cuando en una integral figuran expresiones del tipo que se indica, los siguientes cambios de variable son convenientes:
   a) Para $a^2 + x^2$, usar $x = aTg(v)$ o bien $x = aSenh(t)$.
   b) Para $a^2 - x^2$, usar $x = aSen(v)$ ó $x = aCos(v)$.
   c) Para $x^2 - a^2$, usar $x = aSec(v)$ ó $x = aCosh(t)$.

5. Se desea integrar funciones $R(x)$ (es decir, racionales) de la forma:
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0}$$
con $n < m$. Si suponemos que el polinomio $Q(x)$ se ha factorizado de la siguiente forma:
$$Q(x) = b_m (x - r_1)^{\alpha_1} (x - r_s)^{\alpha_s} . (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} ... (x^2 + b_t x + c_t)^{\beta_t}$$
En donde $r_1, ..., r_s$ son las raíces de Q, de multiplicidades $\alpha_1, ..., \alpha_s$ y $\beta_1, ..., \beta_t$ son números enteros positivos, con $x^2 + b_i x + c_i$ polinomios irreducibles. Entonces $R(x)$ es igual a la suma de funciones racionales del siguiente tipo:
   a) Por cada término $(x - r_i)^{\alpha_i}$ aparece la suma de α_i funciones:
$$\frac{A_{1i}}{(x - r_i)} + \frac{A_{2i}}{(x - r_i)^2} + ... + \frac{A_{\alpha_i i}}{(x - r_i)^{\alpha_i}}$$
   b) Por cada término $(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}$ aparece la suma de β_i funciones de la forma:
$$\frac{B_{1i}x + C_{1i}}{(x^2 + b_i x + c_i)} + \frac{B_{2i}x + C_{2i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^2} + ... + \frac{B_{\beta_i i}x + C_{\beta_i i}}{(x^2 + b_i x + c_i)^{\beta_i}}$$

6. El cambio de variable:
$$t = Tg(\theta/2) \quad Sen(\theta) = \frac{2t}{1 + t^2} \quad Cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad d\theta = \frac{2dt}{1 + t^2}$$
tranforma una integral racional de senos y cosenos en una integral racional en la variable t, la cual en principio puede resolverse por fracciones parciales.

7. Definición: El conjunto $P = \{x_o, x_1, ..., x_n\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$. Si P es una partición de $[a, b]$, se llama norma de P y se denota por $|P|$ al real:

$$|P| = max\{(x_i - x_{i-1}) : i = 1, ..., n)\}$$

8. Definición: Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$. Sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición de $[a, b]$. Como f es acotada en $[a, b]$, también lo es en cada intervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i] \forall i = 1, ..., n$, luego podemos definir:

$$m_i(f) = inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(f) = sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

(La existencia de $m_i(f)$ y $M_i(f)$ está garantizada por ser f acotada en $[x_{i-1}, x_i]$). Con esto se definen las sumas siguientes:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

se llama suma superior de f correspondiente a la partición P

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1})$$

se llama suma inferior de f correspondiente a la partición P.

9. Sea $\mathbb{P}_{[a,b]}$ el conjunto de todas las particiones de $[a, b]$. Sea f una función definida y acotada sobre $[a, b]$. Los números reales

$$\overline{\int_a^b} f = inf\{S(f, P) : P \in \mathbb{P}_{[a,b]}\}$$

$$\underline{\int_a^b} f = sup\{s(f, P) : P \in \mathbb{P}_{[a,b]}\}$$

se llaman integral superior de f en $[a, b]$ e integral inferior de f en $[a, b]$, respectivamente.

10. Si f está definida y acotada en $[a, b]$ y $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b]$, entonces:

$$m(b - a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq M(b - a)$$

11. Definición: Diremos que una función f definida y acotada en $[a, b]$ es integrable según Riemann si se cumple que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. En tal caso, el valor común de estas dos integrales se llama simplemente la integral de f en $[a, b]$ y se denota por $\int_a^b f$.

12. Teorema (condición de Riemann): Una función f definida y acotada en un intervalo $[a, b]$ ssi:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists P \in \mathbb{P}_{[a,b]}) \quad S(f, P) - s(f, P) < \epsilon$$

13. Si f es una función definida, acotada y monótona en $[a, b]$, entonces es integrable en $[a, b]$

14. Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces es intergable en $[a, b]$.

15. Si f es continua en $[a,b]$ Entonces:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall P \in \mathbb{P}_{[a,b]})\{|P| \leq \delta \Longrightarrow |\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f| \leq \epsilon\}$$

donde los valores $\overline{x_i}$ son números arbitrarios en el correspondiente i-ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ definido por la partición P. (Por ejemplo $\overline{x_i} = \frac{x_{i-1}-x_i}{2}$)

16. Sea f una función integrable en $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, Entonces la función G definida por:

$$G(x) = \int_a^x f$$

es continua en $[a,b]$.

17. Primer teorema fundamental del cálculo: Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces la función G definida por:

$$G(x) = \int_a^x f$$

es derivable en $int(I)$ y además $G' = f$ en $int(I)$.

18. Segundo teorema fundamental del cálculo: Sea f integrable en $[a,b]$. Si existe una función F continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $F' = f$ en (a,b), entonces:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

19. Teorema: Si f es continua en $[a,b]$, entonces $\exists \xi \in (a,b)$ tal que $f(\xi) =< f >$, es decir:

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

20. Valor medio generalizado para integrales: Si f es continua en $[a,b]$ y g es una función integrable en $[a,b]$ que no cambia de signo, entonces $\exists \xi \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g$$

21. expresión para el resto de la fórmula de taylor en torno a x_0 en forma integral:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$$

22. Fórmula para el área delimitada por $f(x)$ y $g(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ (asumiendo $f(x) > g(x)$ en este intervalo):

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

23. Consideremos un sólido en el espacio. Nos interesa calcular el volumen V de dicho sólido. Para esto trazamos un eje en el espacio en una dirección conveniente de modo que para cada posición x en dicho eje , se conozca el valor del área de la sección perpendicular del sólido a dicho eje. Llamamos a este área $A(x)$, entonces el volúmen V viene dado por:

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

24. Fórmula para el volumen de un sólido de revolución a través del eje x:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

25. Fórmula del método de cáscarones cilíndricos para volumenes de sólidos de revolución a través del eje y:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Fórmulas análogas existen cuando x se expresa en función de y