MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Juan Dávila B.
Auxiliar : Diego García S.

Auxiliar 7: Aplicaciones de la integral

30 de Octubre de 2015

1. Resumen

1. Fórmula para el área delimitada por $f(x)$ y $g(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ (asumiendo $f(x) > g(x)$ en este intervalo):

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

2. Fórmula para el volumen de un sólido de revolución a través del eje x:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

3. Fórmula del método de cáscarones cilíndricos para volumenes de sólidos de revolución a través del eje y:

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Fórmulas análogas existen cuando x se expresa en función de y.

2. Problemas

1. Calcule el área bajo las siguientes curvas entre $x = 0$ y el primer máximo de estas curvas:

   a) $x\sqrt{1-x}$
   b) xe^{-x}

2. Considere las curvas descritas por las funciones $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ y $g : [0, a] \to \mathbb{R}$ definidas como:

$$f(x) = arcSin(\frac{x}{a}) \quad g(x) = \frac{\pi}{2} + a^2 - x^2$$

   Calcule el área que se encuentra entre $x = 0$ y la intersección de estas curvas.

3. Considere la curva generada por la ecuación:

$$y = 1 - x^{2/3}$$

   a) Calcule el volumen generado por la revolución de esta curva alrededor del eje x entre $x = 0$ y $x = 1$.
   b) Calcule el volumen generado por la revolución de esta curva alrededor del eje y entre $y = 0$ y $y = 1$.
   c) Verifique que el volumen calculado en b) coincide con aquel calculado con el método de cascarones cilíndricos.

4. Usando que el área de una elipse con semiejes a y b es πab calcule el volumen encerrado por la superficie definida por:

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + e^{|x|} = 5$$

5. Sean las funciones $\psi_n : [0, L] \to \mathbb{R}$ con $L > 0$ definidas como:

$$\psi_n(x) = ASin(\frac{n\pi x}{L})$$

Siendo $n \in \mathbb{N}$ y A una constante a determinar. Definimos además la cantidad $P_{(a,b)}$ como:

$$P_{(a,b)} = \int_a^b |\psi_n(x)|^2 dx$$

   a) Determine A imponiendo que $P_{(0,L)} = 1$
   b) Calcule $P_{(\frac{L}{4},\frac{3L}{4})}$
   c) Calcule $P_{(0,\frac{L}{2})}$

Esto es parte de un genuino problema de mecánica cuántica que consiste en colocar una partícula (por ejemplo, un electrón) en una caja unidimensional de largo L, las funciones $\psi_n(x)$ representan el estado cuántico de una partícula en el n-ésimo nivel de energía y las cantidades $P_{(a,b)}$ indican la probabilidad de encontrar a la partícula entre $x = a$ y $x = b$, lo que Usted hizo en a) consiste en imponer que la probabilidad total de encontrar a la partícula en la caja es de 1 (o sea, imponemos que el electrón se encuentre, de hecho, dentro de la caja).

3. Problemas propuestos

1. (**P3 parte b C2 primavera 2014**). Calcule el volumen del sólido generado por la revolución en torno al eje OX del área plana limitada por las curvas de ecuaciones

$$x + y = 5 \quad y \quad xy = 4$$