

MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor : Juan Dávila B.

Auxiliar : Diego García S.



Auxiliar extra 2: Repaso control 1

8 de Octubre de 2015

1. Considere las elipses definidas por:

$$y^2 + \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \quad y^2 + \frac{(x+1)^2}{4} = 1$$

Considere también los rectángulos inscritos en la región limitada por ambas elipses con lados paralelos a los ejes coordenados. Estudie si existen posibles áreas máximas para estos rectángulos, de ser así, calcule el (las) área (áreas) máximas.

2. Dada la función $f(x) = \text{Senh}(x)$ se pide:

- Calcular la derivada de f
- Calcular la derivada de f^{-1}
- Calcular el desarrollo de Taylor de cuarto orden en torno a $x = 0$ de $\text{Senh}^{-1}(x)$. Demostrar, además, que en este orden $\text{Senh}^{-1}(x) \approx \text{Sen}(x)$.

3. Demuestre que la ecuación $x^7 + x^5 + x^3 + 1 = 0$ tiene exactamente una solución real.

4. Sea n un entero positivo fijo y sea $p(x)$ el polinomio

$$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

donde los números $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales fijos. Pruebe que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ([p(x)]^{1/n} - x) = \frac{a_1}{n}$$

5. Defina la función g como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \text{Sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

Demuestre que $g'(0) = \frac{1}{2} > 0$. ¿Es creciente g en algún intervalo que contiene a $x = 0$? Dibuje la gráfica de g cerca de $x = 0$.

6. Sea $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq f(y) + g(y)(y - x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

- Muestre que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $g(x)(y - x) \geq f(x) - f(y) \geq g(y)(y - x)$.
- Muestre que si g es acotada, entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$
- Pruebe que si g es continua en todo $\mathbb{R}$, y se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, con $a_n \neq a, \forall n$, entonces:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = -g(a)$$

7. Demuestre que toda función $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x_o \in (a, b)$ es continua en x_o