MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Juan Dávila B.
Auxiliar : Diego García S.

Problemas propuestos

1. demuestre que la función
$$f(x) := x^3 - \frac{12}{x-1}$$
posee un único cero para $x > 1$. ¿Puede Usted decir entre que enteros se encuentra este cero?.

2. Sea g una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que
$$g(x)Tg(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}/\{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$$
Demuestre que g posee infinitos ceros, lo que es más, siempre existe alguno en los intervalos de la forma $(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$ con $k \in \mathbb{Z}$. Demuestre que, como consecuencia de esto, la derivada de g también se anula infinitas veces.

3. Considere las funciones $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $g : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ definidas como:
$$f(x) = \begin{cases} e^{\beta} x^x & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha - \pi & \text{si x=0} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \beta \frac{Ln(Ln(x))}{Sin(\frac{x}{e} - 1)} & \text{si } x \neq e \\ 2\beta & \text{si x=e} \end{cases}$$
Encuentre α y β tales que estas funciones sean continuas en todo su dominio.

4. Suponga que
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \pi (Tg(x))^x$$
¿Cuánto vale $f(0)$? ¿Cuánto vale $f'(0)$?

5. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supongamos que f es derivable en $\mathbb{R}$ y que
$$g(x) = f(f(x)) + f(5Senh(x) - f(x)) - 4e^{f(x)}$$
   a) Encuentre la derivada de g en términos de f y su derivada
   b) Suponiendo que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 3$, calcule $g'(0)$

6. Considere la elipse
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$
y los rectángulos inscritos en la región limitada por esta con lados paralelos a los ejes coordenados, demuestre que entre todos estos rectángulos existe uno con perímetro máximo, calcule este perímetro.

7. ¿Cuál es la longitud del segmento de recta más corto que está en el primer cuadrante con sus puntos terminales en los ejes coordenados y también es tangente a la gráfica $y = 1/x^2$? Verifique que su respuesta es un mínimo global.

8. Demuestre que, entre todas las cajas rectangulares abiertas con bases cuadradas y volumen fijo dado, la que tiene área de superficie total mínima tiene altura igual a la mitad de la longitud de la arista de su base.

9. Encuentre el punto (x, y) en la parábola $y = 4 - x^2$ más cercana al punto (3,4). Indicación: la ecuación cúbica a resolver tiene un entero pequeño como raíz. Indicación: minimize el cuadrado de la distancia, es fácil convencerse que esta función alcanzará puntos críticos en los mismos puntos que la función original.

10. Considere la familia de pirámides con base cuadrada con volumen fijo dado V. ¿que altura y y orilla de la base $2x$ minimizan el área de superficie total (incluyendo la base)?. Puede usar que el volumen de una pirámide de altura h y área basal A es $V = hA/3$.

11. Encuentre el punto (x, y) en la recta $2x + y = 3$ más cercana al punto $(3, 2)$.

12. ¿Que punto o puntos en la curva $y = x^2$ están más cerca del punto (0,2)? Indicación: el cuadrado de la distancia se minimiza justo cuando se minimiza la distancia misma.

13. en los próximos puntos se le entregan distintas funciones, Usted debe, siempre que pueda, indicar: máximo dominio de definición, ceros, continuidad, asíntotas de todo tipo, comportamiento para $|x|$ grande y para x cerca de cualesquiera discontinuidades de la función, diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión, recorrido y gráfico.

    a) $\frac{e^x}{e^x+1}$

    b) $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$

    c) $\frac{2x}{x+1} - ln(x+1)$

    d) $\frac{2x^2+1}{x^2-2x}$

    e) $e^{\sqrt{2}Sin(x)}$