MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Juan Dávila B.
Auxiliar : Diego García S.

Auxiliar 3: derivadas de funciones y aplicaciones

2 de Octubre de 2015

1. Resumen

1. Regla de l'Hopital: Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a,b), tales que:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = L$$

con $L = 0$ o ∞, y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siempre que este último límite exista

2. Teorema: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ ssi f' es creciente en (a, b)

3. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k + 1)$ veces derivable en todo punto del intervalo (a, b). Sea $T_f^k(.)$ el polinomio de Taylor de orden k en $x_o \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > x_o$ ($x < x_o$) existe $\xi \in (x_o, x)$ ($\xi \in (x, x_o)$) tal que

$$f(x) = T_f^k(x - x_o) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k + 1)!}(x - x_o)^{k+1}$$

2. Problemas

1. (**Parte a pregunta 3 control primavera 2014**). Estudiar completamente la función

$$f(x) = x^{2/3}(x - 1)^{1/3}$$

indicando: dominio, ceros, continuidad, asíntotas de todo tipo, diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión, recorrido y gráfico.

2. Considere las funciones $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $g : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ definidas como:

$$f(x) = \begin{cases} \beta^{\frac{xLn(x)}{x-1}} & \text{si } x \neq 1 \\ \alpha & \text{si x=1} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} Ln(Cosh(\alpha))^{\frac{x - sin(x)}{xsin(x)}} & \text{si } x \neq 0 \\ \beta - 2 & \text{si x=0} \end{cases}$$

Encuentre α y β tales que estas funciones sean continuas en todo su dominio.

3. La función $f : [a, b] \to (0, \infty)$ se dice log-convexa si $Ln(f(x))$ es convexa.

   a) Probar que si f es log-convexa entonces es convexa, y buscar un contraejemplo que muestre que la recíproca es falsa.

   b) Probar que f es log-convexa ssi f^α es convexa para todo $\alpha > 0$

4. *a*) Es bien sabido que en la mecánica newtoniana la energía cinética de un cuerpo es $\frac{1}{2}mv^2$
En cambio Einstein demostró con la teoría de la relatividad especial que, en realidad, la energía cinética de un cuerpo viene dada por:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde c es una constante (la velocidad de la luz en el vacío). Demuestre que esta expresión es reducible a la energía cinética newtoniana en el límite de baja velocidad respecto a la velocidad de la luz. Calcule, además, el máximo error cometido en usar la expresión newtoniana en vez de ocupar la expresión Einsteniana para $v = 0{,}1c$. (Nótese que si $v = 0$ obtenemos $E = mc^2$ la cual es, sin lugar a dudas, la ecuación más famosa de toda la física, la equivalencia masa-energía)

b) Suponga que está perdido en una isla sin ningún tipo de calculadora a mano, de pronto, un genio se aparece y le otorga la oportunidad de sacarlo de la isla pero sólo si Usted es capaz de decirle la raíz de 6401 con 3 cifras significativas de exactitud (Usted obviamente pretende salir de la isla...). Indicación: considere la función $\sqrt{(6400 + x)}$

5. (**Parte b pregunta 1 control primavera 2014)**. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 1 - x^2$, en el primer cuadrante $(x, y > 0)$, tal que ella forme con los ejes coordenados un triángulo rectángulo de la menor área posible. Calcule el área mínima.

3. Problemas propuestos

1. indicar: dominio, ceros, continuidad, asíntotas de todo tipo, diferenciabilidad, crecimiento, puntos críticos, máximos y mínimos, concavidad, puntos de inflexión, recorrido y gráfico de la función $f(x) = cos(cosx)$

2. Demuestre que, entre todas las latas cilíndricas cerradas con volumen fijo dado, la que tiene área de superficie total mínima tiene altura igual al diámetro de la base