MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Juan Dávila B.
Auxiliar : Diego García S.

Resumen control 1

1. Definición de subsucesión: Sea (s_n) una sucesión. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Se llama subsucesión de s_n generada por f, a la sucesión u_n definida por:
$$u_n = s_{f(n)}$$
2. Teorema de Bolzano-Weierstrass: Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.
3. Una función es continua si y solo si:
$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})\ |x - x_o| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_o)| < \epsilon$$
4. f es continua si y solo si para toda sucesión $x_n \in Dom(f)$ se tiene que:
$$x_n \longrightarrow x_o \Longrightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x_o)$$
5. TVI: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua, Si $c, d \in f([a,b])$ entonces para todo número e comprendido entre c y d, existe $x \in [a,b]$ tal que $f(x) = e$
6. Caso especial TVI: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe x_o tal que $f(x_o) = 0$
7. Teorema de Weierstrass: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su máximo y su mínimo en $[a,b]$
8. Definición de continuidad uniforme: $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que
$$(\forall x, y \in A)|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
.
9. Teorema: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua ssi ella es continua en todo punto $\bar{x} \in A$.
10. Definición: Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $x_o \in (a,b)$, si existe el límite
$$\lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$
Dicho límite se llama la derivada de f en x_o y se denota $f'(x_o)$ o bien $\frac{df}{dx}(x_o)$
11. Regla de la cadena: Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ derivable en $x_o \in (a,b)$ y $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ derivable en $y_o = f(x_o) \in (c,d)$. Entonces gof es derivable en x_o con
$$(gof)'(x_o) = g'(f(x_o))f'(x_o)$$
12. Teorema: Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $x_o \in (a,b)$ con $f'(x_o) \neq 0$),entonces la función inversa $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ es derivable en $y_o = f(x_o)$ con
$$(f^{-1})'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_o))}$$
13. Regla de Fermat: Si $\bar{x} \in (a,b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$

14. Proposición: Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, k veces derivable en $x_o \in (a, b)$, con $f'(x_o) = ... = f^{[k-1]}(x_o) = 0$ y $f^{[k]}(x_o) \neq 0$, $k \geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:
    a) Si k es par y $f^{[k]}(x_o) > 0$, x_o es un mínimo local
    b) Si k es par y $f^{[k]}(x_o) < 0$, x_o es un máximo local
    c) Si k es impar, x_o es un punto de inflexión
15. TVM: Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$
En particular, si $g(x) = x$ se tiene:
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$
16. Teorema: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si $f'(x) \geq 0$ (≤ 0) para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente (decreciente) en $[a, b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.
17. Regla de l'Hopital: Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a,b), tales que:
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = L$$
con $L = 0$ o ∞, y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$
Siempre que este último límite exista
18. Teorema: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ ssi f' es creciente en (a, b)
19. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, k- veces derivable en $x_o \in (a, b)$, y sea:
$$T_f^k(h) := f(x_o) + f'(x_o)h + \frac{f''(x_o)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{[k]}(x_o)}{k!}h^k$$
su desarrollo de taylor de orden k en torno a x_o. Entonces:
$$f(x) = T_f^k(x - xo) + o((x - xo)^k)$$
con $\lim_{h \to 0} o(h^k)/h^k = 0$
20. Fórmula de Taylor: Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k + 1)$ veces derivable en todo punto del intervalo (a, b). Sea $T_f^k(.)$ el polinomio de Taylor de orden k en $x_o \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > x_o$ $(x < x_o)$ existe $\xi \in (x_o, x)$ $(\xi \in (x, x_o))$ tal que
$$f(x) = T_f^k(x - x_o) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k + 1)!}(x - x_o)^{k+1}$$